

ЭДВАРД МКРТУМЯН

МАТРИЧНАЯ МАТЕМАТИКА



Почему простые числа
образуют спирали?

ЕРЕВАН 2021

17. X

1976 г.

Фамилия рецензента автору не сообщается.

Просим заключить в квадратные скобки ту часть рецензии, которая не должна быть сообщена автору.

Виноградов Аскальз Иванович, МИРАН С.-Техердур
(фамилия, имя и отчество рецензента)
Э. Л. Мкртумян „ $\pi(2x) - \pi(x) \geq [\log_2^x] - 1$ ”
(фамилия автора и название статьи)

1. Следует ли печатать статью следует
2. Следует ли сделать сокращения в тексте и какие * Нет, статья короткая, ничего лишнего в ней нет
3. Следует ли сделать дополнения и какие Я бы рекомендовал назвать статью „Постулат Бертраана“ вместо того, что сейчас
4. Общий отзыв о работе хороша, которая указана в заглавии.

Зинджоубажамян Рубен Викторович,
в статье Мкртумяна приведено простое доказательство известного постулата Бертраана. Впервые этот постулат был доказан Гельмгольсом в прошлом веке. В начале нашего века его переделками (в более сложном варианте) Адамар и Ванье-Туссен. Точнее, они доказали знаменитый асимптотический закон простых чисел, а из этого закона следует

* В случае отрицательного ответа подробную мотивировку просим поместить в п. 4.

поступает Бармана как следующее.

Мертуин предлагает третий вариант доказательства отнюдь не поступате. Его подход представляет предельно научный интерес для специалистов т.к. он основан на методе решера Эратосфена в новой форме - матричный вариант автора.

До этого не удавалось получить методички решера снизу поднимая тай которая указана в заглавии статьи.

Поэтому интерес представляет не столько результат, сколько подход. Может быть это удастся перенести и на другие проблемы.

Искренне Ваш А.Виноградов

1. 11. 96.

Рецензент А.В. Виноградов

Адрес для перевода гонорара _____

Паспорт _____ № _____ год рожд _____ есть ли дети _____

Книгу составила, редактировала
и подготовила к печати
Лариса Ашотовна Элбакян.

ТЕОРИЯ МАТРИЦ ОСТАТКОВ

Разработан новый метод исследования математических проблем, в которых используется понятие числа. Он основан на понятии „матрицы остатков“. Элементы этих матриц являются остатки от деления некоторых наборов натуральных чисел на простые числа. Подробно изучена структура таких матриц, установлены закономерности распределения в них нулевых и ненулевых остатков. Изучены связи между матрицами остатков, отвечающими различным наборам натуральных чисел. Метод матриц остатков применен для решения ряда проблем теории чисел. В частности, доказаны теоремы, описывающие распределение простых чисел на числовой оси. Выведены формулы простых чисел Мерсена и Ферма, а также получены другие формулы простых чисел. Исследованы проблемы Шинцеля и Гольдбаха. Предложен метод нахождения решений уравнения Серпинского-Эрдеши.

Проблема криптографии решена полностью и может стать основой для создания новых компьютеров, которые любую задачу могут решить 10^4 или 10^5 раз быстрее, чем существующие.

Любая глава этого сборника может стать основой целого раздела теории чисел и, следовательно, математики.

Содержание

От автора	7
От переводчика	9
ВВЕДЕНИЕ	11
1. О некоторых задачах распределения простых чисел	13
1.1. Введение	13
1.2. Матрицы остатков	13
1.3. Подобные матрицы остатков	15
1.4. Сопряженные матрицы остатков	17
1.5. Применение матриц остатков	18
2. Об оценке количеств простых чисел в определенных промежутках	21
2.1. Сопряженные матрицы остатков	21
2.2. Применение матриц остатков	22
2.3. Сопряженные матрицы остатков по второй строке и их применения	23
3. О некоторых проблемах простых чисел	25
3.1. Введение	25
3.2. Теоремы	25
4. О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках I	29
4.1. Введение	29
4.2. Сопряженные матрицы остатков	29
4.3. Матрицы остатков с шагом 2	30
4.4. Применение матриц остатков с шагом 2	32
5. О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках II	35
5.1. Введение	35
5.2. Матрицы остатков	36
5.3. Сопряженные матрицы остатков	37
5.4. Матрицы остатков с шагом 2	38
5.5. Основная теорема	40
6. Смежные матрицы остатков и метод решета	43
6.1. Введение	43
6.2. Матрицы остатков, столбцы без нулей	43
6.3. Смежные матрицы остатков	44
7. Матрицы остатков и проблема Шинцеля	47
7.1. Матрицы остатков с шагом 2	47
7.2. Расширенные матрицы остатков	48
7.3. Ещё раз о простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках	48
7.4. Симметричные матрицы остатков, симметричность чисел на числовой оси	52

7.5. Проблема Шинцеля	52
8. Проблема Гольдбаха	55
8.1. Введение	55
8.2. Матрицы остатков	55
8.3. Средний столбец матрицы остатков и его свойства	56
8.4. Средний столбец матрицы и проблема Гольдбаха	57
9. Свойства матриц остатков	61
10. Квадратные матрицы. Фокусы матриц остатков	63
11. Средняя матрица остатков. Симметричные матрицы	67
12. Простые числа в определенных промежутках чисел, и оценка их количества с двух сторон	71
13. Степенные матрицы остатков	77
14. Фокусы и фокусные расстояния в матрицах остатков	81
14.1. Введение	81
14.2. Фокусные расстояния в матрицах остатков	81
15. Проблемы простых чисел - близнецов	83
16. Деление чисел на числовой оси	87
17. Функция $\pi(n)$ и проблема криптографии	89
18. Соизмеримые и несоизмеримые отрезки	95
19. Противолежащие и сдвинутые матрицы остатков	97
20. Двойное решето	99
21. Дальность столбцов в матрицах остатков	107
22. Числообразование на числовой оси	109
23. Главные и побочные фокусы матриц остатков	113
24. Распад числовой оси. Простые матрицы	117
25. Простообразные числа и комбинаторика	123
26. Заключение	129
27. Истинная сущность натурального нуля (O_n) и функции $c(m, n, n + 1)$	135
27.1. Введение	135
27.2. Расширение матриц. Функция $c(m, n, n + 1)$ в матрицах остатков	135
28. Квадратные матрицы остатков	139
29. Побочные и средние матрицы остатков. Симметричные матрицы	143
30. Комбинаторика на числовой оси	149
31. Потенциально простые числа и уравнения	153
32. Полные и смежные матрицы остатков	159
33. Обобщение в виде запоздалого введения	167
34. Время собирать камни	169

От автора

*Настало время, чтобы математика
обошлась только целыми числами*

Еще со школьной скамьи я заметил, что в математике на числовой оси не все логически оправдано. Например, никак не мог осмыслить, как квадрат отрицательного числа становится положительным, и $0! = 1$. В студенческие годы эти сомнения усилились, особенно когда ознакомился с теоретической физикой.

Превращение правильного вписанного многоугольника в окружность с помощью удвоения числа его сторон - это что-то похожее на то, когда звезды принимаются за точку. Понятия “бесконечно малого” и “бесконечно большого”, которые привели к непрерывности числовой оси и созданию дифференциального и интегрального исчисления, только пригодны для решения повседневных задач. Они становятся беспомощными, когда затрагиваются вопросы “бесконечно малых” и “бесконечно больших” размеров, потому что игнорируется прерывистость числовой оси.

Такие ученые, как Лоренц, Хэвисайд, Адамар и Пуанкаре заметили относительность результатов математических операций на числовой оси, что легло в основу теории относительности Эйнштейна. Но выйти из “порочного круга” существующей математики, вызванного непрерывностью числовой оси, пока никому не удалось.

Математика с одной стороны отрицает существование самого большого числа, доказывает бесчисленность простых чисел, а с другой стороны принимает число ноль кратным всем целым числам. Многие математики (Рашевский, Рвачев) не согласны с этим и с понятием бесконечности на основе аксиомы Архимеда.

Поэтому решили, оставляя неприкосновенным аксиому Архимеда, создать новую теорию, которую следуя известному математику Аскольду Ивановичу Виноградову (Петербург, ЛОМИ), называем матричной математикой. Основой матричной математики является утверждение о различии числа от его порядкового номера на числовой оси. Мы полагаем, что на числовой оси существуют только простые и составные числа. Остальные (дробные, иррациональные, мнимые и т.д.) являются искаженными представлениями целых чисел, и лишь точками на числовой оси, учитывая относительность выбора начала отсчета.

Этот сборник статей состоит из отдельных глав, расположенных исторически по мере того, как они писались. К сожалению, из-за нехватки времени многие вопросы матричной математики (например, оценки функции $\pi(x)$, степенные матрицы остатков, фокусные расстояния в матрицах, теоремы Ферма, проблемы криптографии и т.д.) остались за пределами данного сборника. Надеюсь еще написать про них во второй части этой книги, а если не успею, ее напишут следующие поколения.

Этот сборник рассчитан на читателей, интересующихся математикой. Материал изложен общедоступно и предельно просто. Но не следует читать как художественную литературу, так как в сборнике затрагиваются основы нового подхода к существующей математике, поэтому каждая фраза требует глубокого осмысления. Переходить к

следующей статье следует лишь после приведения к общему знаменателю изученного. Матричная математика является альтернативой существующей математике.

Если читателю покажется, что некоторые утверждения сомнительны и плохо доказаны, обозначения неудачные, выражения не очень гладко оформлены, пусть простит. Мои работы может быть и не гладко оформлены, но по-моему не могут быть неверными.

Приношу огромную благодарность академику НАН РА М. А. Казаряну (ФИАН, Москва) и докторам наук В. Андрееву (ФИАН, Москва), З. Данояну и Г. С. Сукиасяну (ИМ НАН РА, Ереван) за ценные советы и критические замечания.

Ереван, 2013

Литература

- [1] П.К. Рашевский “О догмате натурального ряда”: Успехи Мат. Наук, т. 28, вып. 4(172), с.243-246, 1973.
- [2] В.Л. Рвачев “Неархимедова арифметика и другие конструктивные средства математики, основанные на идеях специальной теории относительности”: Доклады АН СССР, т. 316, вып. 4, 1991.

От переводчика

Монография Э.Л. Мкртумяна выходит в двух вариантах: на русском и английском языках. Она объединяет I и II части сборника „МАТРИЧНАЯ МАТЕМАТИКА“.

В нем излагается новый подход к исследованию математических проблем - Метод матриц остатков. Элементами этих матриц являются остатки от деления некоторой последовательности натуральных чисел на простые. Подробно изучена структура таких матриц, В частности, анализируется распределение в них нулевых и ненулевых остатков. Развитые методы применяются для решения ряда проблем теории чисел. В первую очередь, для нахождения распределения простых чисел на различных отрезках числовой оси. Каждому такому отрезку сопоставляется своя матрица остатков, и сравниваются количества нулевых и ненулевых остатков в матрицах, ассоциированных с разными отрезками. Это позволяет сравнить количество простых чисел, находящихся на этих отрезках. Принцип и метод такого сравнения сформулирован в теореме 1.4. Большинство результатов, представленных в данной монографии, получены путем применения этого метода к различным отрезкам числовой оси. Доказан ряд неравенств, сопоставляющих количество простых чисел на различных отрезках числовой оси.

С помощью методов матриц остатков выведены формулы простых чисел Мерсена и Ферма, а также получены другие формулы распределения простых чисел. Исследованы проблемы Шинцеля и Гольдбаха, и предложен метод нахождения решений уравнения типа уравнения Серпинского-Эрдеши.

Предложено обобщение метода решета - двойное решето.

В целом, результаты, представленные в данной монографии, показывают, что метод матриц остатков позволяет выявить ряд новых закономерностей в структуре числовой оси.

В.А. Андреев
Москва, 2019

Введение

*Математик, ищущий истину с помощью
непрерывности числовой оси, похож на слепую белку,
которая неустанно бежит в чертовом колесе
и думает, что скоро дойдет до края света.*

В нашем сознании сложение означает прибавление некоторому количеству предметов какого-то количества других таких же (иногда и не таких) предметов, получая их общую сумму. При этом не учитывается с какого предмета и в каком направлении велось сложение.

На числовой оси сложение объектов производится так: считается, что эти предметы расположены вдоль одной виртуальной прямой, складываются обязательно с правого конца в правую сторону, заменяя объекты одинаковыми плотно расставленными отрезками единичной длины. В результате получаем точку, которая отдалена от начала числовой оси на определенное количество отрезков единичной длины.

Напрашивается вопрос: начало числовой оси есть точка или число? Ответ на этот вопрос не однозначен, потому что число n на числовой оси характеризуется $n + 1$ точками. Существующая математика на этот вопрос не отвечает четко. Не отвечает и на вопросы: что станет с этой суммой, если поменять начало или масштаб числовой оси?

Не отвечает потому, что не различает начало числовой оси от начала расчета, забывая, что начало числовой оси лишь точка, а начало расчета - это первый предмет (отрезок) от которого начинается расчет, и число 1 находится от числа 0 на таком же расстоянии, что и число 2 от числа 1, или число $n + 1$ от числа n .

Отсутствие различия начала числовой оси от начала расчета приводит к появлению на числовой оси дробных, иррациональных, трансцендентных, комплексных чисел и мнимых корней уравнений. В этом заключается главный недостаток существующей математики, который приводит к тому, что результаты математических операций на числовой оси стали некоммутативными, т.е. относительными.

Используя радиус-векторы, фокусные расстояния, дуализм квантов и т.д. физики всячески старались "сгладить" недуги математики и добились заметных успехов. Им конечно помогли экспериментальные данные, а математика осталась на "первобытном уровне".

Так как четные числа (по отношению начала числовой оси) относительно нечетных, перемещены на единицу вправо (или влево, смотря в какую сторону смотреть), поэтому математика на числовой оси стала однобокой, а математические действия приобрели направление (к примеру: сложение и умножение - в правую сторону, а вычитание и деление - в левую).

Мне совершенно непонятно, число "минус" $2n$ является четным или нечетным?! Ведь знак "минус" показывает только направление! А $2n$ последовательных натуральных

ных чисел показывают, что среди них есть n четных и n нечетных чисел, а больше ничего.

Логика, по которой 0 кратно всем числам ($0! = 1$) деление чисел сводит к делению единицы масштаба числовой оси, т.е. считая количество точек в единичном отрезке бесчисленным, принимается, что $1 = \text{"бесконечности"}$! Однобокий подход к нулю, как к числу, превращал ее в фикцию, и числа на числовой оси становились равноправными.

От этих недостатков свободна матричная математика, в которой введено глобальное понятие натурального нуля $O_n = \prod_{i=1}^m p_i, m = \pi(n)$. В матричной математике, ограничивая отрезок числовой оси, определяют поведение математических операций на этом отрезке, а затем распространяют их на большие отрезки. Для этого в матричной математике создано основополагающее понятие *матрицы остатков*, где нулевой остаток уже не фикция, а реальный объект.

Чтобы четные и нечетные числа были расположены симметрично относительно какой-нибудь точки в матричной математике рассматривают матрицу остатков с нечетным числом столбцов. Средний столбец такой матрицы становится осью симметрии. В матричной математике фундаментальное значение имеет матрица $M_{m,2n+2}(O_n)$, где $m = \pi(n)$, крайние столбцы которой соответствуют числам O_n и $2n$, а средний столбец – числу n , четность которого не всегда зависит от четности крайних столбцов. Поэтому матричная математика показывает, что четность на числовой оси понятие относительное, что приводит к относительности всех математических операций на числовой оси.

Матричная математика старается развивать математику на числовой оси по логике самой математики, а не по логике величайших математиков!

Глава 1

О некоторых задачах распределения простых чисел

Настоящая статья посвящена исследованию некоторых задач распределения простых чисел. Исследование проводится методом матриц остатков, который разработан автором.

1.1 Введение

Об оценке разности [1]

$$\pi(n^2 + n) - \pi(n^2), \quad (1.1)$$

где n -целое число, функция $\pi(n)$ - количество простых чисел, не превосходящих n , ничего не известно, даже не известно, что

$$\pi(n^2 + n) - \pi(n^2) \geq 1. \quad (1.2)$$

Но не думаем, что специалисты мало занимались этим вопросом, так как в литературе часто говорится о нем [2,3].

Из истории математики известно, сколько времени и труда потребовалось для доказательства постулата Бертрана [4]

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq 1. \quad (1.3)$$

Видно, что оценки (1.2) и (1.3) тесно связаны между собой.

Как видно из вышесказанного, теория чисел нуждается в новом подходе к проблемам распределения простых чисел.

Как мы думаем, на роль такого подхода может претендовать метод матриц остатков [5], который многие вопросы аддитивной теории чисел приводит к одной плоскости.

Цель этой статьи: с помощью нового метода доказать (1.3) и оценить (1.1) снизу.

1.2 Матрицы остатков

Рассмотрим следующую матрицу, которую называем матрицей остатков:

$$M_{m,n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}$ – остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i , P_i – i -тое простое число, $\lambda \geq 0$ – целое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Например, для $n = 7$, $\lambda = 0$ имеем $m = 4$ и

$$M_{m,7}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

А для $\lambda = 1$, $n = 7$ матрица $M_{4,7}(1)$ имеет вид

$$M_{4,7}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь первая вспомогательная строка содержит числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$, а первый вспомогательный столбец содержит простые числа P_j . $a_{i,j}$ – остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i . Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1.1 Для любого натурального n

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n),$$

где $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, $\nu(n)$ – количество различных простых делителей числа n .

Доказательство. Сопоставление матриц $M_{m,n}(0)$ и $M_{m,n}(1)$ показывает, что j -тый столбец матрицы $M_{m,n}(0)$ начиная со второго столбца, совпадает с $j - 1$ -ым столбцом матрицы $M_{m,n}(1)$. Причем в матрице $M_{m,n}(0)$ первый столбец отличается от всех столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$, а последний столбец $M_{m,n}(1)$ отличается от всех столбцов матрицы $M_{m,n}(0)$. Первый столбец матрицы $M_{m,n}(0)$ содержит $\pi(n)$ нулей, а последний столбец матрицы $M_{m,n}(1)$ содержит $\nu(n)$ нулей, следовательно,

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n).$$

Теорема 1.2 Для любого целого $\lambda \geq 0$

$$\overline{M}_{m,n}(0, i) \geq \overline{M}_{m,n}(\lambda, i) \geq \overline{M}_{m,n}(1, i),$$

где $\overline{M}_{m,n}(\lambda, i)$ есть количество нулей i -той строки матрицы $M_{m,n}(\lambda)$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(0, i), \quad \text{если} \quad \lambda + a_i \equiv 0 \pmod{P_i}, \quad \lambda + n - b_i \equiv 0 \pmod{P_i},$$

$$0 \leq a_i < \frac{P_i - 1}{2}, \quad 0 \leq b_i < \frac{P_i - 1}{2},$$

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(1, i), \quad \text{если} \quad \lambda + a_i \equiv 0 \pmod{P_i}, \quad \lambda + n - b_i \equiv 0 \pmod{P_i},$$

$$a_i > \frac{P_i - 1}{2}, \quad b_i > \frac{P_i - 1}{2}.$$

Следовательно, теорема доказана.

Следствие 1.1

$$\overline{M}_{m,n}(1) \leq \overline{M}_{m,n}(\lambda) \leq \overline{M}_{m,n}(0).$$

Доказательство следует из равенств:

$$\sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(1, i) = \overline{M}_{m,n}(1), \quad \sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(\lambda),$$

$$\sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(0, i) = \overline{M}_{m,n}(0).$$

Обозначая

$$c(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1), \quad (1.4)$$

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) = \pi(n) - c(m, n, \lambda) - \nu(n), \quad (1.5)$$

Получим

$$0 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

1.3 Подобные матрицы остатков

Определение 1.1 Две матрицы называются подобными, если они имеют одинаковую ширину $t = \pi(n)$ и длину n .

Так например, подобными являются матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$. В дальнейшем полагаем $n \leq \lambda$. Расположим в матрицах $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$ столбцы по максимальной выборке нулей справа налево. Тогда среди выбранных k столбцов нет столбца содержащего меньше нулей, чем любой невыбранный столбец.

Обозначим через $\overline{M}_{m,n}^k(\lambda)$ суммарное количество нулевых остатков k столбцов данной матрицы.

Имеет место теорема.

Теорема 1.3 Для любого целого $\lambda \geq n$

$$\overline{M}_{m,n}^k(\lambda) - \overline{M}_{m,n}^k(1) \geq 0$$

Доказательство. Из теорем 1.1 и 1.2 имели, что

$$0 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

1) Если $c(m, n, \lambda) > 0$, то теорема тривиальна, поскольку в матрице $M_{m,n}(1)$ все столбцы, кроме первого, содержат как минимум один нулевой остаток.

2) Если $c(m, n, \lambda) = 0$, то и $c^*(m, n, \lambda) = 0$, где $c^*(m, n, \lambda)$ сосчитана только по строкам $1 \leq i \leq m$. Следовательно,

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda; i) - \overline{M}_{m,n}(1; i) = 0.$$

Но это невозможно, поскольку λ и $\lambda + n - 1$ совместно кратны на все простые делители числа n . На самом деле при $n = 3$, $\lambda = 4$, $c(m, n, \lambda) = 0$, но если $\lambda > 4$, то $c^*(m, n, \lambda) \neq 0$. Теорема доказана.

Приведем несколько следствий Теоремы 1.3. Рассмотрим матрицу $M_{m,n}(1)$. Обозначим через $L_m(j)$ количество ненулевых остатков, а через $\nu_m^*(j)$ количество нулевых остатков в j -ом столбце матрицы $M_{m,n}(1)$. Легко видеть, что

$$L_m(j) = \pi(n) - \nu_m^*(j), \quad L_m(1) = \pi(n) = m. \quad (1.6)$$

Обозначим через $\bar{L}_{m,n}(\lambda)$ количество ненулевых остатков всей матрицы $M_{m,n}(\lambda)$. Тогда можно доказать, что

$$\bar{L}_{m,n}(1) - \bar{L}_{m,n}(O_n) = \pi(n) - \nu(n),$$

где O_n - натуральный нуль, $O_n = \prod_{i=1}^m p_i$. Легко видеть, что

$$\bar{L}_{m,n}(1) - \bar{L}_{m,n}(\lambda) = \pi(n) - c(m, n, \lambda).$$

Теорема 1.4 В матрице $M_{m,n}(\lambda)$, где $8 < n < \lambda \leq n^2$, $m = \pi(n)$, $(\lambda, n) = \nu(n)$ имеется не менее $\left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - \nu(n)$ столбцов, в каждом из которых нет нулей в строках $1 \leq i \leq m = \pi(n)$, т.е. соответствуют простым числам.

Доказательство. Рассмотрим подобные матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(1)$, где $8 < n < \lambda \leq n^2$, $m = \pi(n)$. Зачеркнем все те столбцы у матриц $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(1)$, в которых есть хотя бы один нуль в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$. Тогда у матрицы $M_{m,n}(1)$ незачеркнутыми останутся только столбцы с нулем в первой строке и первый столбец, т.е. им соответствуют числа вида 2^x . А таких чисел среди первых n чисел имеется ровно $k_1^* = [\log_2 n] + 1$. Следовательно, у матрицы $M_{m,n}(1)$ зачеркнутыми будут $k_1 = n - [\log_2 n] - 1$ столбцов.

Обозначим через k_2^* количество незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, а через k_2 - количество зачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$. Очевидно, $k_2 = n - k_2^*$. Если $k_2 \leq k_1$, то $k_2^* \geq k_1^* = [\log_2 n] + 1$ и подавно $k_2^* \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rfloor - \nu(n)$ и теорема выполнена.

Теперь допустим $k_2 > k_1$. Тогда $k_2^* < k_1^*$. Расположим в матрицах $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$ столбцы по максимальной выборке нулей справа налево так, чтобы сперва расположились незачеркнутые, а потом зачеркнутые столбцы. Так как при нечетных n и четных λ количество четных столбцов (соответствующих четным числам) матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ на 1 больше чем количество четных столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$ и в матрице $M_{m,n}(\lambda)$ количество столбцов, в которых есть хотя бы один нуль в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$ не может быть больше чем $n - \frac{[\log_2 n]}{2} + \nu(n)$, сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим.

$$k_2^* \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - \nu(n).$$

Тот же результат можно получить и по-другому. Напомним, что имеем

$$\bar{M}_{m,n}(\lambda) - \bar{M}_{m,n}(1) = c(m, n, \lambda). \quad (a)$$

Откуда следует, что

$$\bar{M}_{m,n}^{k_2}(\lambda) - \bar{M}_{m,n}^{k_1}(1) = c^*(m, n, \lambda), \quad (b)$$

где $c^*(m, n, \lambda)$ сосчитана только по строкам $1 < i \leq m$, $k_2^* = \alpha_1 + \alpha_2$ и α_1 - количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ в каждом из которых есть только один 0, и этот 0 стоит в строке $i \geq 1$, а α_2 - количество пустых (не имеющих нулей) столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$. Здесь обозначено через $\bar{M}_{m,n}^k(\lambda)$ количество всех нулевых остатков k

столбцов данной матрицы (в том числе и нули в первой строке). Вычитая (b) из (a), получим

$$\alpha_1 - [\log_2 n] - 1 \leq \begin{cases} 1, & \text{при } 2 \nmid n, 2n \mid \lambda; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Предполагая, что каждый из α_1 столбцов содержащий минимум 2 нулевого остатка (учитывая и нули в строке $i = 1$), и учитывая, что $c^*(m, n, \lambda) \leq c(m, n, \lambda) - 1$, и возможно, что величина $[\log_2 n]$ является нечетным числом при $2 \nmid n, 2 \mid \lambda$ получаем

$$\alpha_1 \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rfloor + 1.$$

Таким образом

$$k_2^* - \alpha_1 = \alpha_2 \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - \nu(n).$$

Теорема 1.4 полностью доказана.

Чтобы доказательства теорем были более ясными, рассмотрим сопряженные матрицы остатков.

1.4 Сопряженные матрицы остатков

Определение 1.2 Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ называются сопряженными, если они отличаются распределением нулей только в одной строке.

В частности, можем рассматривать такие сопряженные матрицы, которые отличаются распределением нулей только в первой строке. Например, $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ будут сопряженными матрицами по первой строке, если

$$\bar{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad m = \pi(n).$$

Количество нулевых элементов сопряженной матрицы $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ обозначим через $\bar{M}_{m,n}(\bar{\lambda})$.

Определение 1.3 Столбцы сопряженных по первой строке матриц которые занимают одни и те же места в матрицах, назовем двойниками. Распределение нулей в этих столбцах, кроме первой строки, одинаковые.

Определение 1.4 Столбец называется соответствующим числу λ_j , если элементы этого столбца $a_{i,j}$ образовались при делении данного числа λ_j на простое число P_i и наоборот.

Теорема 1.5 Пустой (не содержащий ни одного нуля) столбец матрицы соответствует столбцу сопряженной матрицы, который содержит только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$, и обратно.

Доказательство очевидно.

Теорема 1.6 Количества столбцов сопряженных (только по первой строке) матриц, каждый из которых содержит минимум один нуль в строках $i > 1$, равны между собой.

Доказательство. Если матрица содержит хоть один нуль в строке $i > 1$, и в столбце j , то и сопряженная матрица тоже в этой строке и в том же столбце содержит тот же самый нуль.

1.5 Применение матриц остатков

Для иллюстрации преимуществ метода матриц остатков, сначала рассмотрим постулат Бертрана, т.е. докажем неравенство (1.3).

Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\bar{1})$ и $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\bar{\lambda})$, которые попарно сопряжены по первой строке. Согласно пункту 1.2 можем обозначить

$$c_1(m, n, \bar{\lambda}) = \overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda}) - \overline{M}_{m,n}(\bar{1}). \quad (1.7)$$

Пусть $\lambda = n + 1$, $n \geq 5$.

Составим объединенные матрицы, столбцы которых являются механическим присоединением столбцов-двойников сопряженных матриц. Таким образом, получим новые матрицы, их обозначим $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$ в соответствии с пунктом 2, где $m^* = 2m$, $1 \leq i \leq 2m$.

Связь числа нулей этих матриц следующая:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda}) &= \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}), \\ \overline{M}_{m,n}(1) + \overline{M}_{m,n}(\bar{1}) &= \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Согласно (1.4) и (1.7)

$$2c^*(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}), \quad (1.9)$$

где $c^*(m, n, \lambda)$ рассчитано только по строкам $i > 1$, $i \neq m + 1$, так как для строк $i = 1$, $i = m + 1$ объединенные матрицы суммарно содержат одинаковое количество (n) нулей и в разности (1.9) уничтожают друг друга.

Пусть символ $\overline{M}_{m,n}^k(\lambda)$ обозначает количество всех нулей k столбцов данной матрицы.

Теорема 1.7 Для любого натурального $n = \lfloor \log_2 \lambda \rfloor$,

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lfloor \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} \right\rfloor - 1,$$

где $\lfloor \log_2 n \rfloor$ обозначает целую часть от $\log_2 n$.

Доказательство. Допустим $\lambda = n + 1$, k_2 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль. Ясно, что k_2 равно и количеству таких же столбцов матрицы $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ (см. Определение 1.4).

Аналогично, количество таких же столбцов для матриц $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\bar{1})$ обозначим k_1 . Тогда, как следствие из (1.9), можем написать

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) = 2c(m, n, \lambda) + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad (1.10)$$

где α_1 – количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых содержит только один нуль, и этот нуль в строке $i = 1$, α_2 есть количество пустых столбцов этой же матрицы. Так как среди чисел $n + 1$, $n + 2, \dots, 2n$ обязательно есть только одно число вида 2^ν , где ν – целое число, следовательно $\alpha_1 = 1$. Имеем

$$0 \leq \alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n),$$

так как если столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ по отношению строк $i \geq 1$ пустой, то ему соответствующее число простое. В матрице $M_{m,n}(1)$ только один пустой столбец (ему

соответствующее число единиц) и $[\log_2 n]$ столбцов, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$, их соответствующие числа следующие: $2, 4, 8, \dots, 2^\nu$, где $2^\nu \leq n$.

С другой стороны, равенство (1.10) можно написать в виде

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) = 2c(m, n, \lambda) + k_2 - k_1, \quad (1.11)$$

так как $\overline{M}_{m^*,n}^k(\lambda, \overline{\lambda})$ равно количеству всех нулей k столбцов данной матрицы.

Допустим $k_2 > k_1$ (в противном случае доказательство теоремы очевидно) и оценим $k_2 - k_1$. Каждая из матриц $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ в строках $i = 1$ и $i = m + 1$ суммарно имеет всего n нулей и $k_1 = n - [\log_2 n] - 1$. Тогда

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) \leq 2c(m, n, \lambda) + \alpha_2 - \alpha_1. \quad (1.12)$$

К такому же выводу приходим, используя Теорему 1.4, так как матрицы $M_{m,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ и $M_{m,n}(1, \overline{1})$ тоже подобные.

Из равенства (1.10) и неравенства (1.12), учитывая четность числа $[\log_2 n]$ следует

$$\alpha_2 \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] + 1}{2} \right\rfloor - \nu(n).$$

Но так как $\alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n)$, получаем

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] + 1}{2} \right\rfloor - \nu(n).$$

Теорема 1.7 доказана.

Замечание. С помощью различных методов по данному вопросу получены сильные результаты (см. [4]). Но наша цель применить метод матриц остатков для нерешенных задач. Что касается оценки разности (1.3) с двух сторон, то наш метод дает более сильные результаты чем существующие.

Теорема 1.8 Для любого целого $x > 0$

$$\pi(x^2 + x) - \pi(x^2) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 x \right\rfloor - \nu(x).$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$, где

$$n = x^2, \quad m^* = 2m, \quad m = \pi(n), \quad \lambda = x + 1, \quad x \geq 1.$$

Допустим, аналогично теореме 1.4, что k_4 показывает количество столбцов матрицы $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$, содержащих минимум два нуля в строках $i > 1, i \neq m + 1$, а k_3 - количество таких же столбцов матрицы $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$.

Можем написать

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_4}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_3}(1, \overline{1}) = 2c(m, n, \lambda) + [\log_2 x] + 1 - \alpha_3 - \alpha_4, \quad (1.13)$$

где $[\log_2 x] + 1$ есть количество тех столбцов матрицы $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$ или в строке $i = m + 1$ и эти столбцы не являются общими с матрицей $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$, т.е. соответствуют числам из промежутка $1, 2, \dots, x$.

Заметим, что $\alpha_3 + \alpha_4$ есть количество тех столбцов матрицы $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$, которые не являются общими с матрицей $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$ и содержат только по одному нулю и этот нуль в строке $i = 1$ или в строке $i = m + 1$. Нетрудно убедиться, что $\alpha_3 \leq 1$, так как среди чисел $x^2 + 1, x^2 + 2, \dots, x^2 + x$ только одно число может быть вида 2^ν , ν – целое число (как например, при $(\sqrt{7})^2$ и $(\sqrt{7})^2 + \sqrt{7}$), а также

$$\alpha_4 = \pi(x^2 + x) - \pi(x^2),$$

так как в матрице $M_{m,n}(\lambda)$ эти столбцы пустые (составное число N содержит простой множитель $\leq \sqrt{N}$), следовательно эти столбцы должны соответствовать простым числам.

Заметим, что в матрицах есть и другие столбцы содержащие по одному нулю, но они уничтожаются в разности (1.13), так как они являются общими для обеих матриц.

Отметим, что столбцы под номерами $x + 1, x + 2, \dots, x^2$ для обеих матриц общие и в разности (1.13) уничтожаются, а сопоставляются матрицы $M_{m^*,x}(x^2 + 1, x^2 + \bar{1})$ и $M_{m^*,x}(1, \bar{1})$, где $m^* = 2m$, $m = \pi(n)$

Аналогично теореме 1.7, учитывая что для целых x , среди чисел $1, 2, \dots, x^2$ имеется $2[\log_2 x]$ чисел вида $2^\nu \leq x^2$, получаем $c(m, n, \lambda) - c^*(m, n, \lambda) = \begin{cases} \nu(x), & \text{при } 2 \nmid x \\ \nu(x) - 1, & \text{при } 2 \mid x \end{cases}$

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_4}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_3}(1, \bar{1}) \leq 2c^*(m, n, \lambda) + \left\lceil \frac{\log_2 x}{2} \right\rceil + \nu(x). \quad (1.14)$$

Вычитая (1.14) из (1.13), получим

$$\alpha_4 \geq \left\lceil \frac{1}{2} \log_2 x \right\rceil - \nu(x), \quad n = x^2.$$

Следовательно,

$$\pi(x^2 + x) - \pi(x^2) \geq \left\lceil \frac{1}{2} \log_2 x \right\rceil - \nu(x).$$

Таким образом теорема 1.8 доказана.

Отметим, что знак равенства в (1.14) имеет место только при $\nu(x) = \nu(x + 1) = 1$.

Следствие 1.2 Среди любых $2n$ последовательных чисел из совокупности целых чисел $n + 1, n + 2, \dots, (n + 1)^2$ имеются самое меньшее $\left\lceil \frac{1}{2} \log_2 n \right\rceil - \nu(n)$ простых чисел.

Доказательство следствия 1.2 тривиально следует из теорем 1.4, 1.7 и 1.8.

Литература

- [1] Бухштаб А. А. Теория чисел. М. 1966.
- [2] Гриценко С. А. Тернарная проблема Гольдбаха и проблема Гольдбаха-Варинга с простыми числами, лежащими в промежутках специального вида // УМН 1988, Т. 43, No 4, С. 203–204.
- [3] Чанга М. Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Математические заметки. 2003, Т. 73, No 3, С. 423–436.
- [4] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.
- [5] Мкртумян Э. Л. Матрицы остатков // Вестник ЕрГосУнт-а. 1995. No 2, С. 107–108.

Глава 2

Об оценке количеств простых чисел в определенных промежутках

Настоящая статья посвящена исследованию некоторых задач распределения простых чисел. Исследование проводится методом матриц остатков, который разработан автором.

Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосходящих целое число n . Об оценке разности

$$\pi(2n) - \pi(n), \quad (2.1)$$

известно, что [1]

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{3}{5} \frac{n}{\ln n}, \quad n > 21. \quad (2.2)$$

Пруст получил наилучшую (из существующих) оценку разности (2.1) снизу:

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{3}{5} \pi(n), \quad n \geq 40. \quad (2.3)$$

Оценку разности (2.1) сверху получил Ландау [2]:

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n). \quad (2.4)$$

В настоящей статье с помощью метода матриц остатков [3] улучшены эти оценки.

2.1 Сопряженные матрицы остатков

Определение 2.1 Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ называются сопряженными, если они отличаются распределением нулей только в одной строке.

В частности, можем рассматривать такие сопряженные матрицы, которые отличаются распределением нулей только в первой строке. Например, $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ будут сопряженными матрицами по первой строке, если

$$\bar{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad m = \pi(n).$$

Количество нулевых элементов сопряженной матрицы $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ обозначим через $\bar{M}_{m,n}(\bar{\lambda})$.

Определение 2.2 Столбцы сопряженных по первой строке матриц, которые занимают одни и те же места в матрицах, называем двойниками. Распределение нулей в этих столбцах, кроме первой строки, одинаковые.

Определение 2.3 Столбец называется соответствующим числу λ_j , если элементы этого столбца $a_{i,j}$ образовались при делении данного числа λ_j на простое число P_i и наоборот.

Теорема 2.1 Пустой (не содержащий ни одного нуля) столбец матрицы соответствует столбцу сопряженной матрицы, который содержит только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$, и обратно.

Доказательство очевидно.

Теорема 2.2 Количество столбцов сопряженных (только по первой строке) матриц, каждый из которых содержит минимум один нуль в строках $i > 1$, равны между собой.

Доказательство. Если матрица содержит хоть один нуль в строке $i > 1$, и в столбце j , то и сопряженная матрица тоже в этой строке и в том же столбце содержит тот же самый нуль.

2.2 Применение матриц остатков

Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\bar{1})$ и $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\bar{\lambda})$, которые попарно сопряжены по первой строке. Согласно пункту 2.2 можем обозначить

$$c_1(m, n, \bar{\lambda}) = \overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda}) - \overline{M}_{m,n}(\bar{1}). \quad (2.5)$$

Пусть $\lambda = n + 1$, $1 \leq n = [\log_2 \lambda]$, $m = \pi(n)$.

Составим объединенные матрицы, столбцы которых являются механическим присоединением столбцов-двойников сопряженных матриц. Таким образом, получим новые матрицы, их обозначим $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$ в соответствии с пунктом 2.2, где $m^* = 2m$, $1 \leq i \leq 2m$.

Связь числа нулей этих матриц следующая:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda}) &= \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}), \\ \overline{M}_{m,n}(1) + \overline{M}_{m,n}(\bar{1}) &= \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

или

$$2c^*(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}), \quad (2.7)$$

где $c^*(m, n, \lambda)$ рассчитано только по строкам $i > 1$, $i \neq m + 1$, так как для строк $i = 1$, $i = m + 1$ объединенные матрицы суммарно содержат одинаковое количество (n) нулей и в разности (2.7) уничтожают друг друга.

Пусть символ $\overline{M}_{m,n}^k(\lambda)$ обозначает количество всех нулей k столбцов данной матрицы. Допустим $\lambda = n + 1$, k_2 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль. Ясно, что k_2 равно и количеству таких же столбцов матрицы $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ (см. теорему 1.4).

Аналогично, количество таких же столбцов для матриц $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\bar{1})$ обозначим k_1 . Тогда как следствие из (2.7) можем написать

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + [\log_2 n] + 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad (2.8)$$

где α_1 – количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых содержит только один нуль, α_2 есть количество пустых столбцов этой же матрицы. Так как

среди чисел $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ обязательно есть только одно число вида 2^ν , где ν – целое число, следовательно $\alpha_1 = 1$. Имеем

$$0 \leq \alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n),$$

так как если столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ по отношению строк $i \geq 1$ пустой, то ему соответствующее число простое. В матрице $M_{m,n}(1)$ только один пустой столбец (ему соответствующее число единица) и $[\log_2 n]$ столбцов, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$, их соответствующие числа следующие: $2, 4, 8, \dots, 2^\nu$, где $2^\nu \leq n$.

С другой стороны равенство (2.8) можно написать в виде

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + k_2 - k_1, \quad (2.9)$$

так как $\overline{M}_{m^*,n}^k(\lambda, \bar{\lambda})$ равно количеству всех нулей k столбцов данной матрицы (в том числе и нули в строках $i = 1$, $i^* = m + 1$).

Теорема 2.3 Для любого целого $1 \leq n = [\log_2 \lambda]$, $m = \pi(n)$

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{\pi(n)}{2} + \left[\frac{1}{2} [\log_2 n] \right] - 1.$$

Доказательство. Равенство (2.9) показывает, что если из матриц выбрать k_1 и k_2 столбцов, то

$$\begin{aligned} & \overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) \leq \\ & \leq 2c^*(m, n, \lambda) + \left(n - \frac{\pi(n)}{2} - 1 - \left[\frac{1}{2} \log_2 n \right] \right) - (n - [\log_2 n] - 1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Это следует из того, что в матрице $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$ столбцы соответствующие числам 1 и $[\log_2 n]$ имеют только по одному нулю, а в матрице $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$ таких столбцов ровно $\pi(2n) - \pi(n) + 1$. Остальные столбцы имеют минимум два нуля. Сопоставление матриц по максимальной выборке дает (2.10). Вычитая (2.10) из (2.8), получим

$$\alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{\pi(n)}{2} + \left[\frac{1}{2} [\log_2 n] \right] - 1.$$

Таким образом теорема 2.3 доказана.

2.3 Сопряженные матрицы остатков по второй строке и их применения

Определение 2.4 Матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ и $M_{m,n}(\tilde{\lambda})$ называются сопряженными по второй строке, если они отличаются распределением нулей только по второй строке.

Например, $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\bar{1})$ и $M_{m,n}(\tilde{1})$ будут сопряженными матрицами по второй строке, если

$$\bar{1} = 1 + 2 \prod_{i=3}^m P_i, \quad m = \pi(n),$$

$$\tilde{1} = 1 + 4 \prod_{i=3}^m P_i.$$

Употребляя обозначения аналогичные, как в случае сопряженных матриц по первой строке, для объединенных матриц сопряженных по второй строке, получим

$$\overline{M}_{m^*,n}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(\overline{1}) = 3c^*(m, n, \lambda), \quad (2.11)$$

где

$$\overline{M}_{m^*,n}(\overline{\lambda}) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda}) + \overline{M}_{m^*,n}(\tilde{\lambda}).$$

Здесь $m^* = 3m$, а $c^*(m, n, \lambda)$ рассчитано только по строкам $i \neq 2$.

Теорема 2.4 Для любого натурального n

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{3}{5} (\pi(n) + [\log_3 n] - 1),$$

где $[\log_3 n]$ обозначает целую часть от $\log_3 n$.

Доказательство. Пусть $\lambda = n + 1$ и k_1 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$, которые по отношению $i \neq 2$ строк не пусты. Следовательно,

$$k_1 = n - [\log_3 n] - 1.$$

Пусть k_2 – количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, которые не пусты, и по отношению всех строк кроме первой содержат хоть один ноль. Следовательно,

$$k_2 \leq n - \left(\pi(n) - 1 - \frac{2}{3}\alpha \right), \quad \alpha = \pi(2n) - \pi(n).$$

Тогда из (2.11) следует

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(\overline{1}) = 3c^*(m, n, \lambda) + [\log_3 n] + 1 - \alpha. \quad (2.12)$$

Из определения объединенных матриц, сопряженных по второй строке, нетрудно получить

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(\overline{1}) &\leq 3c^*(m, n, \lambda) + n + 1 - \pi(n) + \frac{2}{3}\alpha - (n - 1) = \\ &= 3c^*(m, n, \lambda) - \pi(n) + \frac{2}{3}\alpha + 2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Из (2.12) вычитая (2.13), получим

$$\alpha = \pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{3}{5} (\pi(n) + [\log_3 n] - 1).$$

Таким образом теорема 2.4 доказана.

Литература

- [1] Janos Pintz, “Landau’s problems on primes”, J. Theor. Nombres, Bordeaux, vol. 21, no. 2, pp. 357–404, 2009.
- [2] Чанга М.Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Математические заметки. 2003. Т. 73 No 3 С. 423–436.

Глава 3

О некоторых проблемах простых чисел

3.1 Введение

а) Гипотеза Лежандра была сформулирована Эдмундом Ландау на Международном Математическом конгрессе в 1912 году и звучит так ([2]): *верно ли, что для любого натурального n в промежутке от n^2 до $(n+1)^2$ лежит хотя бы одно простое число?*

Согласно статье [2], по состоянию на 2009 год гипотеза Лежандра все еще не доказана. Но в [2] из следствия Теоремы 1.8 фактически вытекает, что

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \geq [\log_2 n] - 1, \quad (3.1)$$

где $\pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих целое число n , $[\log_2 n]$ означает целую часть.

В этой главе доказывается более сильное утверждение

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \geq \pi(2n) - \pi(n) + \nu(n) - 1. \quad (3.2)$$

Неравенство (3.2) сильнее, чем (3.1) при больших n .

б) Представляет интерес и оценка верхней границы. В настоящей статье доказывается, что

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \leq \frac{\pi(n)}{2} + 1.$$

с) Принято, что если $x, y \geq 2$ – натуральные числа, то

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y). \quad (3.3)$$

Это неравенство было известно древним китайцам, хотя оно ждет пока своего строгого доказательства. В [2] указано, что неравенство (3.3) верно при $x = y$. В настоящей статье решается эта задача полностью.

3.2 Теоремы

Теорема 3.1 Для любого натурального x ,

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \geq [\log_2 x] - 1.$$

Доказательство. Составим объединенные матрицы остатков, столбцы которых являются механическим присоединением столбцов-двойников сопряженных матриц. Таким образом, получим новые матрицы, их обозначим $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$ и $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$, где $n = x^2$, $m^* = \pi(x^2)$, $\lambda = x+1$.

Имеем (см. [2])

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + [\log_2 x] + 1 - \alpha, \quad (3.4)$$

$$\alpha = \pi(x+1)^2 - \pi(x^2),$$

где k_1 – количество тех столбцов матрицы $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$, каждый из которых содержит минимум 2 нуля в строках $i \neq 1, i \neq m+1, i \neq m+2$, а k_2 – количество таких же столбцов матрицы $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$. Нетрудно получить, что

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) \leq 2c^*(m, n, \lambda) + 2. \quad (3.5)$$

Заметим, что символ $\overline{M}_{m^*,n}^k(\lambda, \overline{\lambda})$ показывает количество всех нулей k столбцов, а столбцы, соответствующие числам $2x+1, 2x+2, \dots, x^2$ общие и в разности уничтожаются. Поэтому сопоставление матриц $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ и $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$, где $m = \pi(n)$, $n = x^2$, приводит к сопоставлению матриц $M_{m^*,2x}(1, \overline{1})$ и $M_{m^*,2x}(x^2+1, \overline{x^2+1})$, где $m^* = \pi(n)$.

Вычитая (3.5) из (3.4) получим

$$\alpha \geq [\log_2 x] - 1.$$

Заметим, что α есть количество простых чисел между $(x+1)^2$ и x^2 , что и доказывает Теорему 3.1.

Теорема 3.2 *Для любого натурального x ,*

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \geq \pi(2x) - \pi(x) + \nu(x) - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу остатков, у которой исключены строки P_k , $x < P_k < 2x$ (такую матрицу называем суженной). Тогда в суженной матрице $M_{m,n}(1)$, где $n = x^2$, $m = \pi(x^2) - \pi(2x) + \pi(x)$, появляются пустые столбцы, номера которых соответствуют числам P_k , $\lambda = 2x+1$.

Рассмотрим также сопряженную суженную матрицу остатков по второй строке. Из результатов Главы 2 имеем

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_4}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_3}(\overline{1}) = 3c^*(m, n, \lambda) + \pi(2n) - \pi(n) + [\log_3 n] + 1 - \alpha. \quad (3.6)$$

где k_4 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых содержит нули в строках $i = k$, разность $c^*(m, n, \lambda)$ не считается по строкам $i \neq 2, i \neq k$. Аналогично, количество таких же столбцов для матрицы $M_{m,n}(1)$ обозначим k_3 . Здесь тоже столбцы соответствующие числам $2x+1, 2x+2, \dots, x^2$ общие и в разности уничтожаются. Так как левая часть (3.6) из себя представляет разность, то сужение матриц не влияет на количество простых чисел между x^2 и $(x+1)^2$, откуда и следует (3.6).

Из теории матриц остатков известно, что

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_4}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_3}(1, \overline{1}) \leq 3c^*(m, n, \lambda) - \nu(n) + 2 + [\log_3 n], \quad (3.7)$$

где $n = x^2$, $m = \pi(x^2) - \pi(2x) + \pi(x)$. Вычитая (3.7) из (3.6), получим

$$\alpha \geq \pi(2x) - \pi(x) + \nu(x) - 1.$$

Но так как $\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2)$, следовательно

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \geq \pi(2x) - \pi(x) + \nu(x) - 1.$$

Теорема 3.2 доказана.

Теорема 3.3 Для любого натурального x ,

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \leq \frac{\pi(x)}{2} + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим сопряженные по первой строке матрицы остатков, для которых известно, что

$$\overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda),$$

где $n = x^2$, $m^* = \pi(x^2)$, $\lambda = (x+1)^2$. Отсюда нетрудно получить

$$\overline{M}_{m^*,n}^{d_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{d_1}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + 1 - \alpha, \quad (3.8)$$

где d_2 есть количество тех столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, каждый из которых содержит нули в строках $1 < i \leq m^*$, d_1 – количество таких же столбцов для матрицы $M_{m,n}(1)$. Таким образом, $d_1 = x^2$, $d_2 = (x+1)^2$ и $\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2)$. Отсюда следует неравенство

$$\overline{M}_{m^*,n}^{d_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{d_1}(1, \bar{1}) \geq 2c^*(m, x, \lambda) - \frac{1}{2}\pi(x). \quad (3.9)$$

Вычитая (3.9) из (3.8), получим

$$\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \leq \left\lfloor \frac{\pi(x)}{2} \right\rfloor + 1.$$

Теорема 3.3 доказана.

Теорема 3.4 Если $x, y \geq 2$ – натуральные числа, то

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y). \quad (3.10)$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно принять, что $y > x$, так как при $x = y$ теорема доказана в [2]. Рассмотрим сопряженные по первой строке матрицы остатков, для которых известно, что

$$\overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda).$$

Допустим $n = y$, $\lambda = x+1$, $m = \pi(y)$. Тогда

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + [\log_2 x] + 1 - \alpha, \quad (3.11)$$

где k_1, k_2 – количество тех столбцов, которые имеют нули в строках $i \neq 1$, $i \neq m+1$. Так как эти матрицы имеют общие столбцы, и нули этих общих столбцов при вычитании уничтожаются, и исчезают столбцы, соответствующие числам $y - x$, следовательно, $\alpha = \pi(x+y) - \pi(y)$

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) \geq 2c^*(m, n, \lambda) + \frac{3}{2}[\log_2 x] - \pi(x). \quad (3.12)$$

Вычитая (3.12) из (3.11), получим

$$\alpha = \pi(x+y) - \pi(y) \leq \pi(x) - \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 x \right\rfloor + 1.$$

Следовательно,

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y) + \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 x \right\rfloor - 1.$$

Теорема 3.4 доказана.

Литература

- [1] Janos Pintz, “Landau’s problems on primes”, J. Theor, Nombres, Bordeaux, vol. 21, no. 2, pp. 357-404, 2009.
- [2] Mkrumyan E.L. “On some Problems of Distribution of Prime Numbers”, глава 2 данного сборника.
- [3] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.
- [4] Чанга М. Е. Простые числа в специальных промежутках и аддитивные задачи с такими числами // Математические заметки. 2003. Т. 73, No 3 С. 423–436.

Глава 4

О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках, I

В статье исследуются последовательности натуральных чисел, содержащие числа, взаимно простые со всеми числами меньшими заданного числа, зависящего от длины последовательности. Исследование проводится методом матриц остатков.

4.1 Введение

Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосходящих целое число n . В настоящей статье доказано неравенство

$$\pi(n) \leq \pi(3n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1, \quad (4.1)$$

и теорема о том, что среди любых последовательных $6n$ натуральных чисел есть хотя бы одно число, которое взаимно простое со всеми числами меньшими или равными n .

Этот вопрос интересовал многих математиков и в дальнейшем стал и проблематичным. Самые интересные работы по этой проблематике у Ранкина. Отметим, что и Ранкину не удалось [1] решить эту задачу [2], [3], потому что с помощью существующей математики невозможно решить не только вопросы простых чисел, но и взаимнопростых чисел в общем виде.

4.2 Сопряженные матрицы остатков

Определение 4.1 Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ называются сопряженными, если они отличаются распределением нулей только в одной строке.

В частности, можем рассматривать такие сопряженные матрицы, которые отличаются распределением нулей только в первой строке.

Теорема 4.1 Матрицы остатков $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ будут сопряженными матрицами по первой строке, если

$$\bar{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad m = \pi(n). \quad (4.2)$$

Доказательство. Из определения матрицы остатков следует, что в i -той строке элементы повторяются с периодом P_i . Отсюда следует, что i -тые строки матриц $M_{m,n}(\lambda)$

и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ совпадают тогда и только тогда, когда разность $\lambda - \bar{\lambda}$ кратна простому числу P_i . Следовательно матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ совпадают тогда и только тогда, когда разность $\lambda - \bar{\lambda}$ кратна произведению простых чисел $\prod_{i=1}^m P_i$. Так как число $\prod_{i=2}^m P_i$ всегда нечетное, то числа λ и $\bar{\lambda}$ имеют разную четность. Следовательно, для чисел λ и $\bar{\lambda}$ связанных соотношением (4.2) все строки (кроме первой) матриц $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ совпадают, т.е. они сопряжены по первой строке. Теорема доказана.

Например, для $\lambda = 1$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$ матрица $M_{4,8}(1)$ имеет вид

$$M_{4,8}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $\lambda = 1$ имеем $\bar{\lambda} = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$. Сопряженная матрица $M_{4,8}(106)$ имеет вид

$$M_{4,8}(106) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 106 & 107 & 108 & 109 & 110 & 111 & 112 & 113 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видим, все строки (кроме первой) матриц $M_{4,8}(1)$ и $M_{4,8}(106)$ совпадают.

Количество нулевых элементов сопряженной матрицы $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ обозначим через $\bar{M}_{m,n}(\bar{\lambda})$.

Определение 4.2 *Столбец называется соответствующим числу λ_j , если элементы этого столбца $a_{i,j}$ образовались при делении данного числа λ_j на простое число P_i и наоборот.*

Теорема 4.2 *Пустой (не содержащий ни одного нуля) столбец матрицы остатков соответствует числу λ_j , являющемуся взаимнопростым по отношению ко всем числам $\leq n$, и соответствует столбцу сопряженной матрицы, который содержит только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$, и обратно.*

Доказательство очевидно, см. пример. В нашем примере матрицы $M_{4,8}(106)$ второй, четвертый и восьмой столбец соответствуют простым числам 107, 109, 113. В примере же матрицы $M_{4,8}(1)$ второй, четвертый и восьмой столбец содержат только один нуль, и этот нуль находится в строке $i = 1$.

Теорема 4.3 *Количества столбцов сопряженных (только по первой строке) матриц, каждый из которых содержит минимум один нуль в строках $i > 1$, равны между собой.*

Доказательство. Если матрица содержит хоть один нуль в строке $i > 1$, и в столбце j , то и сопряженная матрица тоже в этой строке и в том же столбце содержит тот же самый нуль.

4.3 Матрицы остатков с шагом 2

Определение 4.3 *Матрицей остатков с шагом h называем матрицу, у которой $\lambda_j = \lambda + (j - 1)h$.*

Обозначаем ее через $N_{m,n}(h|\lambda)$.

Ниже будем рассматривать матрицы остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ с шагом 2. Они содержат $m = \pi(n)$ строк и n столбцов. При этом элемент $a_{i,j}$ матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$ равен остатку от деления числа $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ на P_i , P_i – i -тое простое число. Если число λ четное, то матрицу остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ называем четной. Отметим, что как и для обычной матрицы остатков $M_{m,n}(\lambda)$, у четной матрицы остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$. Например, при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 2$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

а при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 0$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все свойства и обозначения матриц остатков можно распространить и на четные матрицы остатков, только надо учесть, что первая строка ($P_1 = 2$) содержит лишь нули. Следовательно,

$$\overline{N}_{m,n}(2|0) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \quad m = \pi(n), \quad (4.3)$$

где $\overline{N}_{m,n}(2|\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ – количество различных простых делителей числа $2n$.

Обозначим

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2). \quad (4.4)$$

Заметим, что $G(m, n, \lambda)$ зависит только от строк $i > 1$, так как первые строки этих матриц содержат одинаковое количество (n) нулей и в разности (4.4) они уничтожаются. Следовательно,

$$0 \leq G(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - 1.$$

Определение 4.4 Матрицу остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ с шагом 2 называем четной, если число λ (а значит и все числа $\lambda_j = \lambda + 2j$) являются четными.

Определение 4.5 Матрицу остатков $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$ с шагом 2 называем нечетной, если число λ (а значит и все числа $\lambda_j = \lambda + 2j$) являются нечетными

Отметим, что у нечетной матрицы остатков первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$, а первая строка состоит из n единиц.

Например, при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 1$ матрица $N_{m,n}(2 \nmid 1)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2 \nmid 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

4.4 Применение матриц остатков с шагом 2

Теорема 4.4 Для любого целого $n > 0$

$$\pi(n) \leq \pi(3n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1. \quad (4.5)$$

Доказательство. Рассмотрим нечетное число λ связанное с n соотношением

$$\lambda = \begin{cases} n + 1, & \text{если } n \text{ четное,} \\ n, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Отметим, что числа λ_j четной матрицы $N_{m,n}(2|2)$ состоят из чисел $2, 4, 6, \dots, 2n$, а у нечетной матрицы $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$ состоят из n нечетных чисел начиная с λ . Рассмотрим четное число

$$\bar{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad (4.7)$$

где $m = \pi(n)$. Если выполнено (4.7), то четная матрица $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$, будет сопряжена с нечетной матрицей $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$. Имеем (см. (4.4))

$$G(m, n, \lambda) = \bar{N}_{m,n}(2|\bar{\lambda}) - \bar{N}_{m,n}(2|2).$$

Назовем пустым столбец, не содержащий нулей в строках $i > 1$. Пусть k есть количество тех столбцов четной матрицы $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль, а α есть количество пустых столбцов нечетной матрицы $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$. Нетрудно заметить, что $\alpha = n - k$, и

$$\bar{N}_{m,n}^k(2|\bar{\lambda}) - \bar{N}_{m,n}(2|2) = G(m, n, \lambda) - \alpha, \quad (4.8)$$

где $\bar{N}_{m,n}^k(2|\bar{\lambda})$ есть количество всех нулей (включая и нули первой строки) k столбцов четной матрицы $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$.

Так как пустому столбцу соответствует число λ_j , являющееся взаимно простым по отношению ко всем числам $\leq n$, то имеем

$$\alpha = \pi(3n) - \pi(n). \quad (4.9)$$

В матрице $N_{m,n}(2|2)$ есть пустые столбцы, их количество равно $[\log_2 n] + 1$. Кроме того матрица $N_{m,n}(2|2)$ имеет больше столбцов, содержащих только один нуль в строках $i > 1$, чем матрица $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$. Следовательно, учитывая (4.9), получим

$$G(m, n, \lambda) - \pi(n) - [\log_2 n] - 1 \leq \bar{N}_{m,n}^k(2|\bar{\lambda}) - \bar{N}_{m,n}(2|2) \leq G(m, n, \lambda) - \pi(n). \quad (4.10)$$

Из (4.10) и (4.8) получим

$$\pi(n) \leq \pi(3n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1.$$

Теорема 4.4 доказана.

Теорема 4.5 Для любого целого $x > 0$ среди любых последовательных x натуральных чисел есть хотя бы одно число, которое взаимно простое со всеми числами $\leq x$.

Доказательство. Допустим заданы $3x$ последовательных натуральных четных чисел. Составим матрицу $N_{m,n}(2|\lambda)$, где $\lambda > 6x$ – произвольное четное число, $m = \pi(x)$, $n = 3x$. Составим матрицу $N_{m,n}(2|2)$ состоящую из чисел $2, 4, 6, \dots, 6x$. Сопоставим эти матрицы по количеству содержащихся нулей, т.е. рассмотрим следующие соотношения

$$\overline{N}_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = G(m, n, \lambda), \quad (4.11)$$

или

$$\overline{N}_{m,n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = G(m, n, \lambda) - \alpha, \quad (4.12)$$

где k есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль (первая строка не фигурирует, так как она состоит только из нулей), α есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$.

Отметим, что $\overline{N}_{m,n}^k(2|\lambda)$ есть количество всех нулей (включая и нули первой строки) k столбцов матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$. Если даже число x содержит только простой делитель 3 (про 2 уже не говорим, так как λ – четное число), то все равно строка $i = 2$, $P_2 = 3$ не влияет на разность нулей в матрицах, т.е. не влияет на $G(m, n, \lambda)$. Так как

$$0 \leq G(m, n, \lambda) \leq \pi(x) - 1, \quad (4.13)$$

то получаем

$$\overline{N}_{m,n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) \leq G(m, n, \lambda) - 1. \quad (4.14)$$

Из (4.12) и (4.14) получим $\alpha \geq 1$. Но по определению α есть количество чисел, начиная с λ , каждый из которых не содержит ни одного простого нечетного множителя $\leq x$. Следовательно, среди любых последовательных $3x$ четных чисел есть хотя бы одно число, которое не содержит ни одного простого нечетного делителя $\leq x$.

На языке сопряженных матриц это означает, что среди любых последовательных $3x$ натуральных нечетных чисел есть хотя бы одно число, которое взаимно простое со всеми числами $\leq x$. Но $3x$ нечетных числа соседствуют с $3x$ четными числами. Следовательно, среди любых последовательных $6x$ натуральных чисел есть хотя бы одно число, которое взаимно простое со всеми числами $\leq x$. Таким образом теорема 4.5 доказана.

Примечание. При увеличении $\nu(x)$ усиливается неравенство (4.14), а значит и усиливается Теорема 4.5.

Литература

- [1] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.
- [2] Rankin R. A. “The difference between consecutive prime numbers, I”, London Math. Soc. 13 (1938), 242–247.
- [3] Rankin R. A. “The difference between consecutive prime numbers, II”, Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 (1990), 255–256.
- [4] Мкртумян Э. Л. О некоторых задачах распределения простых чисел, глава 1 данного сборника.

Глава 5

О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках, II

В статье исследуются последовательности натуральных чисел, содержащие числа, взаимно простые со всеми числами меньшими заданного числа, зависящего от длины последовательности. С помощью матриц остатков получена оценка верхней границы функции $\rho^*(x)$.

5.1 Введение

В статье [1] функция $\rho^*(x)$ определена следующим образом:

$$\rho^*(x) = \max_y N(x, y),$$

где $N(x, y)$ – количество натуральных чисел в интервале $(y, y + x)$, которые взаимно просты со всеми числами меньшими или равными x . В [1] получено неравенство

$$\rho^*(x) - \pi(x) \geq (\log 2 - \varepsilon) \frac{x}{(\log x)^2},$$

где $\pi(x)$ обозначает количество простых чисел, не превосходящих целое число x . Из этого неравенства следует

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\rho^*(x) - \pi(x)) = +\infty.$$

Отметим, что [1] – наилучшее исследование функции $\rho^*(x)$. Однако остается задача оценки функции $\rho^*(x)$ сверху. Предложенная Э.Ландау оценка [2]

$$\rho^*(x) \leq 2\pi(x)$$

является грубой при $y \gg x$. В настоящей статье с помощью теории матриц остатков получена оценка верхней границы функции $\rho^*(x)$, а именно

$$\rho^*(x) \leq \pi(n) + 3([\log_2 n] + 1), \quad \text{где } n = 12x, y = 11x, \lambda \geq 2.$$

Дадим, более доступное определение: *функция $\rho^*(x)$ показывает максимальное количество натуральных чисел из последовательных чисел $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + x + y$, каждое из которых взаимно простое со всеми простыми числами меньшими или равными x .*

Ясно, что $y \gg x$, поэтому фактически нужно найти зависимость $y = f(x)$. Разумеется, на числовой оси интервалов, соответствующих определению функции $\rho^*(x)$,

имеется бесчисленное множество, так как сопряженных матриц остатков по первой строке при $\lambda = 2^\epsilon$, $\epsilon > 1$ имеется бесчисленное множество [3]. Следовательно, задача нахождения функции $\rho^*(x)$ содержит и задачу нахождения самого малого натурального числа λ , с которого начинается такой интервал.

5.2 Матрицы остатков

Рассмотрим следующую матрицу, которую называем матрицей остатков [3]:

$$M_{m,n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}$ – остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i , P_i – i -тое простое число, $\lambda \geq 0$ – целое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5.1 Для любого натурального n

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n),$$

где $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, $\nu(n)$ – количество различных простых делителей числа n .

Доказательство. Сопоставление матриц $M_{m,n}(0)$ и $M_{m,n}(1)$ показывает, что j -тый столбец матрицы $M_{m,n}(0)$ начиная со второго столбца, совпадает с $j - 1$ -ым столбцом матрицы $M_{m,n}(1)$. Причем в матрице $M_{m,n}(0)$ первый столбец отличается от всех столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$, а последний столбец $M_{m,n}(1)$ отличается от всех столбцов матрицы $M_{m,n}(0)$.

Первый столбец матрицы $M_{m,n}(0)$ содержит $\pi(n)$ нулей, а последний столбец матрицы $M_{m,n}(1)$ содержит $\nu(n)$ нулей, следовательно,

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n).$$

Теорема 5.2 Для любого целого $\lambda \geq 0$

$$\overline{M}_{m,n}(0, i) \geq \overline{M}_{m,n}(\lambda, i) \geq \overline{M}_{m,n}(1, i),$$

где $\overline{M}_{m,n}(\lambda, i)$ есть количество нулей i -той строки матрицы $M_{m,n}(\lambda)$.

Доказательство. Нетрудно убедиться, что

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(0, i), \quad \text{если} \quad \lambda + a_i \equiv 0 \pmod{P_i}, \quad \lambda + n - b_i \equiv 0 \pmod{P_i},$$

$$0 \leq a_i < \frac{P_i - 1}{2}, \quad 0 \leq b_i < \frac{P_i - 1}{2},$$

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(1, i), \quad \text{если} \quad \lambda + a_i \equiv 0 \pmod{P_i}, \quad \lambda + n - b_i \equiv 0 \pmod{P_i},$$

$$a_i > \frac{P_i - 1}{2}, \quad b_i > \frac{P_i - 1}{2}.$$

Следовательно, теорема доказана.

Следствие 5.1

$$\overline{M}_{m,n}(1) \leq \overline{M}_{m,n}(\lambda) \leq \overline{M}_{m,n}(0).$$

Доказательство следует из равенств:

$$\sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(1, i) = \overline{M}_{m,n}(1), \quad \sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(\lambda),$$

$$\sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(0, i) = \overline{M}_{m,n}(0).$$

Обозначая

$$c(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1),$$

имеем

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) = \pi(n) - c(m, n, \lambda) - \nu(n), \quad (5.1)$$

$$0 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

5.3 Сопряженные матрицы остатков

Определение 5.1 Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ называются сопряженными, если они отличаются распределением нулей только в одной строке.

В частности, можем рассматривать такие сопряженные матрицы, которые отличаются распределением нулей только в первой строке. Например, $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ будут сопряженными матрицами по первой строке, если

$$\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad m = \pi(n). \quad (5.2)$$

Например, для $\lambda = 1$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$ матрица $M_{4,8}(1)$ имеет вид

$$M_{4,8}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для $\lambda = 1$ имеем $\overline{\lambda} = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$. Сопряженная матрица $M_{4,8}(106)$ имеет вид

$$M_{4,8}(106) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 106 & 107 & 108 & 109 & 110 & 111 & 112 & 113 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Как видим, все строки (кроме первой) матриц $M_{4,8}(1)$ и $M_{4,8}(106)$ совпадают.

Количество нулевых элементов сопряженной матрицы $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ обозначим через $\overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda})$.

Определение 5.2 Столбец называется соответствующим числу λ_j , если элементы этого столбца $a_{i,j}$ образовались при делении данного числа λ_j на простое число P_i и наоборот.

Теорема 5.3 Пустой (не содержащий ни одного нуля) столбец матрицы остатков соответствует числу λ_j , которое является взаимнопростым по отношению ко всем числам $\leq n$ и столбцу сопряженной матрицы, который содержит только один ноль, и этот ноль находится в строке $i = 1$, и обратно.

Доказательство очевидно, см. пример. В нашем примере у матрицы $M_{4,8}(106)$ второй, четвертый и восьмой столбец соответствуют простым числам 107, 109, 113. В примере же матрицы $M_{4,8}(1)$ второй, четвертый и восьмой столбец содержат только один ноль, и этот ноль находится в строке $i = 1$.

Теорема 5.4 Количества столбцов сопряженных (только по первой строке) матриц, каждый из которых содержит минимум один ноль в строках $i > 1$, равны между собой.

Доказательство. Если матрица содержит хоть один ноль в строке $i > 1$, и в столбце j , то и сопряженная матрица тоже в этой строке и в том же столбце содержит тот же самый ноль.

5.4 Матрицы остатков с шагом 2

Определение 5.3 Матрицей остатков с шагом h называем матрицу, у которой $\lambda_j = \lambda + (j - 1)h$.

Обозначаем ее через $N_{m,n}(h|\lambda)$.

Ниже будем рассматривать матрицы остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ с шагом 2. Они содержат $m = \pi(n)$ строк и n столбцов. При этом элемент $a_{i,j}$ матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$ равен остатку от деления числа $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ на P_i , P_i – i -тое простое число. Если число λ четное, то матрицу остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ называем четной. Отметим, что как и для обычной матрицы остатков $M_{m,n}(\lambda)$, у четной матрицы остатков $N_{m,n}(2|\lambda)$ первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$. Например, при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 2$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

а при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 0$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все свойства и обозначения матриц остатков можно распространить и на четные матрицы остатков, только надо учесть, что первая строка ($P_1 = 2$) содержит лишь нули. Следовательно,

$$\bar{N}_{m,n}(2|0) - \bar{N}_{m,n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \quad (5.3)$$

где $\bar{N}_{m,n}(2|\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $N_{m,n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ – количество различных простых делителей числа $2n$.

Обозначим

$$G(m, n, \lambda) = \bar{N}_{m,n}(2|\lambda) - \bar{N}_{m,n}(2|2). \quad (5.4)$$

Заметим, что для четных λ функция $G(m, n, \lambda)$ зависит только от строк $i > 1$, так как первые строки этих матриц содержат одинаковое количество (n) нулей и в разности (5.4) они уничтожаются.

Определение 5.4 Матрицу остатков $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$ с шагом 2 называем нечетной, если число λ является нечетным.

Отметим, что у нечетной матрицы остатков первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$, а первая строка состоит из n единиц.

Например, при $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 1$ матрица $N_{m,n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{m,n}(2 \nmid 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

Для чисел λ и $\bar{\lambda}$ связанных соотношением (5.2) все строки (кроме первой) матриц $N_{m,n}(2|\lambda)$ и $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$ совпадают, такие матрицы называем сопряженными матрицами по первой строке.

Так как число $\prod_{i=2}^m P_i$ всегда нечетное, то числа λ и $\bar{\lambda}$ имеют разную четность. Следовательно, матрица сопряженная к четной матрице будет нечетной и наоборот: матрица сопряженная к нечетной матрице будет четной.

Лемма 5.1 Для нечетного λ и четного числа $\bar{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda$ и $m = \pi(n)$ имеем

$$G(m, n, \lambda) = \bar{N}_{m,n}(2 \nmid \bar{\lambda}) - \bar{N}_{m,n}(2 \nmid \lambda) = n.$$

Доказательство. В первой строке четной матрицы $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$ имеется n нулей, а в первой строке нечетной матрицы $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$ нет нулей (сплошные единицы). Так как эти матрицы сопряжены по первой строке, то остальные строки у них совпадают. Лемма доказана.

Теорема 5.5 Если $2 \nmid n$, то имеет место

$$\pi(n) + 2([\log_2 n] + 1) \leq \pi(12n) - \pi(6n) \leq \pi(n) + 3([\log_2 n] + 1).$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,12n}(1)$, где $2 \nmid n$, $m = \pi(n)$ и представим ее в виде

$$M_{m,12n}(1) = M_{m,6n}(1) + M_{m,6n}(6n + 1) = N_{m,6n}(2|2) + N_{m,6n}(2 \nmid 1).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц в каждом из которых есть минимум 1 нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$.

1) В матрице $M_{m,6n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначая k_1^* получаем

$$\pi(6n) - \pi(n) - 2[\log_2 n] - 1 \leq k_1^* \leq \pi(6n) - \pi(n) - [\log_2 n] - 1. \quad (a)$$

Потому что столбцы которые соответствуют числам $2P_k$, $n < P_k < 3n$ и $[\log_2 3n] = [\log_2 n] + 1$ незачеркнуты, а количество зачеркнутых столбцов $k_1 = 6n - k_1^*$.

2) Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,6n}(6n+1)$ обозначая k_2^* имеем

$$\pi(6n) + [\log_2 n] - 1 \leq k_2^* \leq \pi(6n) + [\log_2 n] + 2. \quad (b)$$

Потому что среди чисел $6n+1, 6n+2, \dots, 12n$ есть только одно число вида 2^r , и числа вида $2^r \cdot P_k$, где $n < P_k < 3n$, $6n < 2^r P_k \leq 12n$ которые тоже не зачеркнуты, а количество зачеркнутых столбцов $k_2 = 6n - k_2^*$.

Так как $\overline{M}_{m,6n}(6n+1) - \overline{M}_{m,6n}(1) = G(m, 6n, 6n+1)$ и следовательно

$$\overline{M}_{m,6n}^{k_2}(6n+1) - \overline{M}_{m,6n}^{k_1}(1) = G(m, 6n, 6n+1) - \overline{M}_{m,6n}^{k_2^*}(6n+1) + \overline{M}_{m,6n}^{k_1^*}(1),$$

где $\overline{M}_{m,n}^k(n)$ показывает количество нулевых остатков (в том числе нулевые остатки и строки $i = 1$) из выражения $\overline{M}_{m,6n}^{k_2^*}(6n+1) - \overline{M}_{m,6n}^{k_1^*}(1)$ и из неравенств (a) и (b) получим теорему 5.5.

Такой же ответ получили бы если столбцы матрицы $M_{m,6n}(1)$ и $M_{m,6n}(6n+1)$ расставляли бы по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны распределились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляли матрицы в таком расположении столбцов.

Следствие 5.2 В матрице $N_{m,6n}(2|2)$, где $2 \nmid n$, $m = \pi(n)$, количество столбцов в каждом из которых есть только один нулевой остаток, и этот нулевой остаток в строке $i = 1$, не менее чем $\pi(n) + 2([\log_2 n] + 1)$ и не более чем $\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1)$.

Доказательство следствия вытекает из доказательства теоремы, если рассмотреть матрицы $N_{m,6n}(2|2)$ и $N_{m,6n}(2 \nmid 1)$ с зачеркнутыми и незачеркнутыми столбцами, учитывая, что они имеют одинаковое количество столбцов.

5.5 Основная теорема

Напомним, что функция $\rho^*(x)$ показывает максимальное количество натуральных чисел среди последовательных чисел $\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+x+y$, которые взаимно просты со всеми простыми числами меньшими или равными x .

Теорема 5.6 На числовой оси среди любых последовательных $12n$ натуральных чисел есть не более чем

$$\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1)$$

чисел, каждое из которых взаимно простое со всеми простыми числами $\leq n$.

Доказательство. Рассмотрим четные матрицы $N_{m,6n}(2|2)$ и $N_{m,6n}(2|\lambda)$, где $m = \pi(n)$ и λ - четное число, $\lambda \gg n$.

Отметим, что матрица $N_{m,6n}(2|2)$ составлена из чисел $2, 4, 6, \dots, 12n$, а матрица $N_{m,6n}(2|\lambda)$ составлена из чисел $\lambda, \lambda+2, \lambda+4, \dots, \lambda+12n-2$.

Сопоставим эти матрицы по количеству содержащихся нулей, т.е. рассмотрим следующие соотношения, вытекающие из (4.2),

$$\overline{N}_{m,6n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) = G(m, 6n, \lambda), \quad (5.5)$$

или

$$\overline{N}_{m,6n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) = G(m, n, \lambda) - \alpha, \quad (5.6)$$

где k есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,6n}(2|\lambda)$, каждый из которых в строках $i > 1$ содержит минимум один нуль (первая строка не фигурирует, так как она состоит только из нулей), α есть количество тех столбцов этой же матрицы, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$. Следовательно,

$$6n = k + \alpha$$

Докажем неравенство

$$\overline{N}_{m,6n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) \geq G(m, n, \lambda) - \pi(n) - 3([\log_2 n] + 1), \quad (5.7)$$

где $\overline{N}_{m,6n}^k(2|\lambda)$ есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,6n}(2|\lambda)$, каждый из которых в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$ содержит минимум один нуль. Предположим противное, т.е.

$$\overline{N}_{m,6n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) < G(m, n, \lambda) - \pi(n) - 3([\log_2 n] + 1). \quad (5.8)$$

Так как матрица $N_{m,6n}(2|2)$, по следствию 5.1, содержит не более чем $\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1)$ столбцов, каждый из которых содержит нули только в первой строке, и $\overline{N}_{m,6n}^{k+\alpha}(2|\lambda) = N_{m,6n}(2|\lambda)$, из (5.8) получим

$$\overline{N}_{m,6n}^{k+\alpha}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) < G(m, n, \lambda).$$

Но это противоречит равенству (5.5). Неравенство (5.7) доказано.

Из (5.6) и (5.7) получим

$$\alpha \leq \pi(n) + 3([\log_2 n] + 1). \quad (5.9)$$

Вспомнив, что α есть количество тех столбцов матрицы $N_{m,6n}(2|\lambda)$, каждый из которых содержит только один нуль и этот нуль в строке $i = 1$, можем утверждать, что на числовой оси среди последовательных $6n$ четных натуральных чисел есть не более чем α чисел, каждое из которых не содержит ни одного простого нечетного делителя $\leq n$.

Но так как $6n$ последовательных четных чисел составляют четную матрицу, и ей где-то на числовой оси соответствует нечетная матрица сопряженная по столбцам, которые имеют одинаковое количество, соответственно четных и нечетных столбцов, следовательно разность этих столбцов, каждый из которых содержит хотя бы один нуль в строках $1 \leq i \leq m$, не более чем $\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1)$.

Таким образом, четная матрица $N_{m,6n}(2|\lambda)$ и нечетная $N_{m,6n}(\lambda \mp 1)$, где $m = \pi(n)$, $\lambda \geq 2$, являются матрицами, сопряженными по столбцам, и разность их столбцов, каждый из которых содержит хотя бы один нуль в строках $1 \leq i \leq m$, тоже не более чем

$$\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1).$$

Таким образом

$$\rho^*(12n) = \rho^*(x) \leq \pi(n) + 3([\log_2 n] + 1), \quad n = 12x, \quad y = 11x, \quad \lambda \geq 2.$$

Теорема 5.6 доказана.

Литература

- [1] D. Hensley, J. Richards, “Primes in Intervals”, *Acta Arithm.*, vol 25, no. 4, 375–394, 1974.
- [2] Janos Pintz, “Landau’s problems on primes”, *J. Theor, Nombres, Bordeaux*, vol. 21, no. 2, pp. 357–404, 2009.
- [3] Мкртумян Э. Л. О простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках I.

Глава 6

Смежные матрицы остатков и метод решета

В статье показано, что простые числа Мерсена (M_p) и простые числа Ферма (F_p) бесчисленны и указаны их места на числовой оси. Исследование проводится методом матриц остатков, предложенного автором.

6.1 Введение

Числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ называются числами Ферма, если они простые, то их обозначаем F_p . Если число вида $2^n - 1$ – простое, то оно называется простым числом Мерсена и обозначается M_p .

Моя цель – показать, что простые числа Мерсена (M_p) и простые числа Ферма (F_p) бесчисленны и указать их места на числовой оси.

Многие поколения математиков (и не только математиков) занимались проблемами простых чисел Мерсена и Ферма, но не смогли доказать их бесчисленность. У консервативных математиков, кто пренебрегает теорией матриц остатков, большие трудности возникают при нахождении очередного простого числа Мерсена или Ферма. Все эти трудности удастся преодолеть с помощью развитой автором теории матриц остатков.

6.2 Матрицы остатков, столбцы без нулей

Рассмотрим следующую матрицу, которую называем матрицей остатков:

$$M_{m,n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}$ – остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i , P_i – i -тое простое число, $\lambda \geq 0$ – целое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$.

Например, для $\lambda = 8$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$ матрица $M_{4,8}(8)$ имеет вид

$$M_{4,8}(8) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что простым числам большим чем n , соответствуют столбцы без нулей, а простым числам $P_i \leq n$, соответствуют столбцы с одним нулем в строке $i > 1$.

Обозначим через $\nu(x)$ количество различных простых делителей числа x . В матрице $M_{m,2n}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, количество нулевых остатков столбца j обозначим через $\nu_m^*(j)$, а количество ненулевых остатков столбца j обозначим через $L_m(j)$. Так как в каждом столбце имеется $m = \pi(n)$ нулевых и ненулевых остатков, то

$$L_m(j) + \nu_m^*(j) = \pi(n) = m, \quad L_m(n^k) = \pi(n^k) - \nu(n) \quad \text{или} \quad L_m(p^k) = \pi(p^k) - 1. \quad (6.1)$$

6.3 Смежные матрицы остатков

Одним из фундаментальных понятий теории матриц остатков является понятие Смежных матриц остатков.

Определение 6.1 Две матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\lambda + 1)$ называются смежными матрицами остатков.

Например, для матрицы $M_{4,8}(8)$: смежной будет матрица $M_{4,8}(9)$ имеющая вид

$$M_{4,8}(9) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Обозначим через $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $M_{m,n}(\lambda)$. Исследуем вопрос чем отличается количество нулевых элементов у смежных матриц. Обозначим через $\nu_m^*(j)$ количество нулевых остатков столбца j в матрице $M_{m,n}(1)$.

Теорема 6.1 Для любых m, n и λ имеет место

$$|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda + 1)| = |\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)| \geq 0.$$

Доказательство. Из (6.1) имеем для матрицы $M_{m,n}(\lambda)$

$$L_m(\lambda) + \nu_m^*(\lambda) = \pi(n),$$

Так как матрица $M_{m,n}(\lambda + 1)$ получается из матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ сдвигом на один столбец влево, то j -тый столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ совпадает с $j - 1$ столбцом матрицы $M_{m,n}(\lambda + 1)$, $j = 2, 3, \dots, n$. Таким образом, столбцы матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ кроме первого, совпадают со столбцами матрицы $M_{m,n}(\lambda + 1)$ кроме последнего. Следовательно,

$$|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda + 1)| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda + 1)| = |\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)| \geq 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Запись $|\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)| \geq 0$ в теореме удивляет многих математиков, которые считают, что это тривиально, так как модуль не может быть отрицательным. Такой записью мы хотели подчеркнуть, что для некоторых n и λ , выражение $|\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)|$ может быть нулем, например $\nu_m^*(10) = \nu_m^*(21)$. Таким образом взаимосвязь чисел на числовой оси матричная математика представляет глубже чем существующая.

Теорема 6.2 В матричной математике имеют место соотношения

$$|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda + 1)| = |\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)| = 1, \quad n < \lambda, \quad m = \pi(n),$$

если

- 1) $\lambda = p$ - простое число; $\lambda + 1 = 2^r$, где r - натуральное число;
- 2) $\lambda + 1 = p$ - простое число, где $\lambda + n = 2^r$, или наоборот.

Доказательство следует из сопоставления смежных матриц остатков $M_{m,p}(p)$ и $M_{m,p}(p+1)$ и сведением к разности их нулевых остатков

$$|L_m(\lambda) - L_m(\lambda + 1)| = |\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + 1)| = 1.$$

Следствие 6.1 Если

$$|\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + 1)| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda + 1)| = 1,$$

то

$$|\overline{M}_{m,n}(n) - \overline{M}_{m,n}(n + 1)| = 1.$$

Доказательство следствия тривиально следует из доказательства теоремы. Сразу видно, что следствие и теорема верны, если $n = p$ - простое число, а $n + 1 = 2^r$ или наоборот.

Теорема 6.3 Если $p = 2^n + 1$ простое число, то $q = (2^n)^2 + 1 = 4^n + 1$ - тоже простое число.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,q}(1)$, где $m = \pi(2^n)$. Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум один ноль в строках $1 < i \leq m$. Столбцы, соответствующие числам 1 и 2, 2^n и $2^n + 1$, $(2^n)^2$ и $(2^n)^2 + 1$, не зачеркнуты по Теореме 6.2 и Следствию, и так как в матричной математике

$$\begin{aligned} |\overline{M}_{m,q-1}(1) - \overline{M}_{m,q-1}(2)| &= |\overline{M}_{m,q-p}(p-1) - \overline{M}_{m,q-p}(p)| = \\ &= |\overline{M}_{m,p-1}(1) - \overline{M}_{m,p-1}(2)| = |\nu_m^*(2) - \nu_m^*(1)| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda + 1)| = 1. \end{aligned}$$

Это означает, что число q - простое. Теорема доказана.

Теорема 6.3 содержит более глубокий смысл, чем то, что следует из того, что $2^n + 1$ - простое число, т.е. видно что n не только четное, но и не может иметь простых нечетных делителей. Это подсказывает, что в матричной математике простые числа Ферма можно найти среди чисел, расположенных ближе к началу числовой оси, а потом определить остальные дальше от начала числовой оси. То есть

$$2^2 + 1 = 5, \quad (2^2)^2 + 1 = 17, \quad ((2^2)^2)^2 + 1 = 257, \dots$$

Так можно найти все простые числа Ферма F_p до бесконечности.

Великий Ферма "метод бесконечного спуска" применил совместно с понятием "среднего арифметического". Но гениальный Ферма к сожалению не был знаком с теорией матриц остатков и не предполагал что "среднее арифметическое" на числовой оси может быть точкой, а не числом. Поэтому Ферма допустил некоторые просчеты, как например его предположение, что все числа вида $F_n = 2^{2^n} + 1$ являются простыми.

Теорема 6.4 Если $q = 2^p - 1$ - простое число, то $2^q - 1 = q_k$ - тоже простое число.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,q_k}(1)$, где $m = \pi(2^p - 2)$. Пользуясь Теоремой 6.2, и тем, что матрицы $M_{m,q_k-q}(q-1)$ и $M_{m,q_k-q}(q)$ - смежные, аналогично доказательству теоремы 6.3 получим доказательство теоремы 6.4, т.е. $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^7 - 1 = 127, \dots$

Отметим, что не все простые числа Мерсена получаются таким способом. Например $2^5 - 1 = 31$ тоже простое число Мерсена, и 31 как и 3 становится началом новой серии простых чисел Мерсена. Все простые числа Мерсена можно получить с помощью этих двух серий. Это вытекает из десятиричности матричной математики, где простые числа 2, 3 и 5 играют основополагающую роль. Этим и отличается существующая математика от матричной математики, а простые числа Мерсена, от простых чисел Ферма!

Литература

- [1] Rosser, Schoenfeld, Illinois J. Math., vol. 6, pp. 64–89, 1962.
- [2] Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilungen der Primzahlen, Leipzig, 1909.
- [3] Мкртумян Э. Л. Матрицы остатков, Вестник ЕрГосУнт-а. 1995. No 2, С. 107–108.

Глава 7

Матрицы остатков и проблема Шинцеля

В статье исследуются последовательности натуральных чисел, содержащие числа, взаимно простые со всеми числами меньшими заданного числа, зависящего от длины последовательности. Исследование проводится методом матриц остатков. Доказана проблема Шинцеля о простых числах в арифметических прогрессиях

Известный польский математик А. Шинцель выдвинул гипотезу, что любая арифметическая прогрессия $ax_i + b$, $1 \leq b < a$, $(a, b) = 1$ содержит хотя бы одно простое число, если $0 \leq x_i \leq a$. Эта задача известна как проблема Шинцеля и до сих пор не решена. Специалистам известно [1] сколько усилий и времени потребовалось для доказательства бесконечности простых чисел в арифметической прогрессии. Матрицы остатков облегчают решение таких задач.

7.1 Матрицы остатков с шагом 2

Определение 7.1 Матрицей остатков с шагом h называем матрицу, у которой $\lambda_j = \lambda + (j - 1)h$.

Обозначаем ее через $N_{m,hn}(h|\lambda)$.

Обозначим через $\pi(n)$ количество простых чисел, не превосходящих целое число n . Ниже будем рассматривать матрицы остатков $N_{m,2n}(2|\lambda)$ с шагом 2. Они содержат $m = \pi(n)$ строк и $2n$ столбцов. При этом элемент $a_{i,j}$ матрицы $N_{m,2n}(2|\lambda)$ равен остатку от деления числа $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ на P_i , P_i — i -тое простое число. Если число λ четное, то матрицу остатков $N_{m,2n}(2|\lambda)$ называем четной. Отметим, что как и для обычной матрицы остатков $M_{m,n}(\lambda)$, у четной матрицы остатков $N_{m,2n}(2|\lambda)$ первый столбец соответствует числу $\lambda_1 = \lambda$. Например, при $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 2$ матрица $N_{m,2n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

а при $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 0$ матрица $N_{m,2n}(2|\lambda)$ имеет вид

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Все свойства и обозначения матриц остатков можно распространить и на четные матрицы остатков, только надо учесть, что первая строка ($P_1 = 2$) содержит лишь нули.

Следовательно,

$$\overline{N}_{m,2n}(2|0) - \overline{N}_{m,2n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \quad m = \pi(n), \quad (7.1)$$

где $\overline{N}_{m,2n}(2|\lambda)$ – количество нулевых элементов (нулей) матрицы $N_{m,2n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ – количество различных простых делителей числа $2n$.

Обозначим

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,2n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,2n}(2|2). \quad (7.2)$$

Заметим, что $G(m, n, \lambda)$ зависит только от строк $i > 1$, так как первые строки этих матриц содержат одинаковое количество $(2n)$ нулей и в разности (7.2) они уничтожаются. Следовательно,

$$0 \leq G(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - 1.$$

Определение 7.2 Матрицу остатков $N_{m,2n}(2|\lambda)$ с шагом 2 называем четной, если число λ (а значит и все числа $\lambda_j = \lambda + 2j$) являются четными.

Определение 7.3 Матрицу остатков $N_{m,2n}(2 \nmid \lambda)$ с шагом 2 называем нечетной, если число λ (а значит и все числа $\lambda_j = \lambda + 2j$) являются нечетными

Отметим, что у нечетной матрицы остатков первый столбец соответствует нечетному числу $\lambda_1 = \lambda$, а первая строка состоит из $2n$ единиц.

Например, при $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 1$ матрица $N_{m,2n}(2 \nmid \lambda)$ имеет вид

$$N_{m,2n}(2 \nmid \lambda) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

7.2 Расширенные матрицы остатков

Расширим нечетную матрицу $N_{m,2n}(2 \nmid \lambda)$, добавив m^* строк, соответствующих квадратам простых чисел P_q , лежащих в интервале $3 \leq P_q \leq \sqrt{4n}$ (m^* – количество простых чисел P_q , лежащих в интервале $3 \leq P_q \leq \sqrt{4n}$). Это означает, что каждое число, соответствующее столбцу матрицы делим еще и на P_q^2 и полученный остаток приписываем в соответствующий столбец. Расширенную матрицу обозначим $N_{m^*,2n}(2 \nmid \lambda)$ и $N_{m^*,2n}(2|2)$, где $m = \pi(n)$, $m_* = m + m^*$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$. Например, при $n = 4$ в интервале $3 \leq P_q \leq \sqrt{16} = 4$ есть одно простое число $p_q = 3$. Таким образом $m = \pi(4) = 2$, $m^* = 3$,

$$N_{m^*,8}(2 \nmid \lambda) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

Цель расширения – создание критерия, по которому можно отличить простые числа от составных.

7.3 Ещё раз о простых и взаимнопростых числах в специальных промежутках

Теорема 7.1 Для любого натурального n

$$\pi(n) + [\log_2 n] + 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + 2. \quad (7.3)$$

Доказательство. Рассмотрим нечетную матрицу $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$, (столбцы которой соответствуют числам $1, 3, 5, \dots, 2n-1$) и четную матрицу $N_{m,2n}(2|2)$ (столбцы которой соответствуют числам $2, 4, 6, \dots, 2n$), $m = \pi(n)$. Расширим эти матрицы, добавив m^* строк, соответствующих квадратам простых чисел P_q , лежащих в интервале $3 \leq P_q \leq \sqrt{4n}$ (m^* - количество простых чисел P_q , лежащих в интервале $3 \leq P_q \leq \sqrt{4n}$). Это означает, что каждое число, соответствующее столбцу матрицы делим еще и на P_q^2 и полученный остаток приписываем в соответствующий столбец. Расширенную матрицу обозначим $N_{m_*,2n}(2 \nmid 1)$ и $N_{m_*,2n}(2|2)$, где $m = \pi(n)$, $m_* = m + m^*$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$. Например, при $n = 4$ имеем $m = \pi(4) = 2$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$,

$$N_{m_*,8}(2 \nmid 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$N_{m_*,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

так как матрица $M_{m_*,4n}(1) = N_{m_*,2n}(2 \nmid 1) + N_{m_*,2n}(2|2)$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$. Зачеркнем те столбцы этих матриц, которые имеют минимум 2 нуля в строках $1 < i \leq m_*$. В нечетной матрице $N_{m_*,2n}(2 \nmid 1)$ зачеркнем еще столбцы, соответствующие простым числам p_i , $\sqrt{4n} < p_i^r \leq 4n$, $r \geq 2$. В матрице $N_{m_*,2n}(2|2)$ зачеркнем еще столбцы, соответствующие числам вида $2p^r$, $\sqrt{4n} < 2p^r \leq 4n$, $r \geq 2$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в нечетной матрице $N_{m_*,2n}(2 \nmid 1)$ будет

$$k_1^* = \pi(4n) - \pi(n) + [\log_2 n] + 1,$$

так как первый столбец не зачеркнут.

Количество зачеркнутых столбцов в матрице $N_{m_*,2n}(2 \nmid 1)$ будет $k_1 = 2n - k_1^*$.

2. Количество незачеркнутых столбцов в четной матрице $N_{m_*,2n}(2|2)$ обозначим через k_2^* . С одной стороны имеем

$$k_2^* \geq \pi(4n) - 2\pi(n) - [\log_2 n] - 1,$$

так как незачеркнуты столбцы, соответствующие числам $2p_i$ и $4p_i$, где $2 < p_i \leq n$; $4p_i \leq 4n$; также незачеркнуты столбцы, соответствующие числам $2^r p_i$, $r > 2$, и незачеркнуты числа $[\log_2 2n]$.

С другой стороны имеем

$$k_2^* \leq \pi(4n) - 2\pi(n) + 1,$$

потому что количество чисел вида $2^r p_i$ меньше, чем $[\log_2 n] + 1$.

Так как количество столбцов в матрицах $N_{m_*,2n}(2 \nmid 1)$ и $N_{m_*,2n}(2|2)$ равны между собой, то расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулей (вначале незачеркнутые, а потом зачеркнутые) и сопоставляя матрицы, получим

$$\pi(n) + [\log_2 n] + 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + 2.$$

Теорема 7.1 доказана.

Теорема 7.2 Для любого натурального n

$$\pi(n) + 2[\log_2 n] + 1 \leq \pi(6n) - \pi(3n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + 2. \quad (7.4)$$

Доказательство. Ясно, что

$$M_{m_*, 6n}(1) = N_{m_*, 3n}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, 3n}(2|2).$$

Рассмотрим расширенные матрицы $N_{m_*, 3n}(2 \uparrow 1)$ и $N_{m_*, 3n}(2|2)$, где $m_* = m + m^*$, $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{6n})$. Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум 2 нуля в строках $1 < i \leq m_*$. В нечетной матрице $N_{m_*, 3n}(2 \uparrow 1)$ зачеркнем еще столбцы, соответствующие числам p_i , $\sqrt{6n} < p_i^r < 6n$, $r \geq 2$. В матрице $N_{m_*, 3n}(2|2)$ зачеркнем еще столбцы, соответствующие числам вида $2p_i$, $\sqrt{6n} < 2p_i^r \leq 6n$, $r \geq 2$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в нечетной матрице $N_{m_*, 3n}(2 \uparrow 1)$ будет

$$k_1^* = \pi(6n) - \pi(n) + [\log_2 n] + 2,$$

а количество зачеркнутых столбцов будет $k_1 = 3n - k_1^*$.

2. Количество незачеркнутых столбцов в четной матрице $N_{m_*, 3n}(2|2)$ обозначим через k_2^* . С одной стороны имеем

$$k_2^* \geq \pi(6n) - 2\pi(n) - [\log_2 n],$$

так как не зачеркнуты столбцы, соответствующие числам $2p_k$ и $4p_k$, где $n < p_k \leq 3n$; $4p_k \leq 6n$; также не зачеркнуты и столбцы, соответствующие числам $[\log_2 6n]$, их количество не более чем

$$k_2^* \leq \pi(6n) - 2\pi(n) - [\log_2 n] + 1.$$

Расставляя столбцы матриц как в теореме 7.1 и сопоставляя их, получим

$$\pi(n) + 2[\log_2 n] + 1 \leq \pi(6n) - \pi(3n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + 2.$$

Теорема 7.2 доказана.

Теорема 7.3 Для любого натурального n

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) + [\log_2 n] - [\log_3 n] - 1. \quad (7.5)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m, n}(1)$ и $M_{m, n}(n+1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим эти матрицы, добавив m^* строк, соответствующих квадратам простых чисел P_q , лежащих в интервале $3 < P_q \leq [\sqrt{2n}]$. Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум 2 нуля в строках $1 < i \leq m_*$, учитывая, что

$$M_{m_*, 2n}(1) = M_{m_*, n}(1) + M_{m_*, n}(n+1)$$

имеем:

1. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m, n}(1)$ будет

$$k_1^* = \pi(n) - [\log_3 \sqrt{n}] + [\log_2 \sqrt{n}] - 1,$$

а количество зачеркнутых столбцов $k_1 = n - k_1^*$. Первый столбец не зачеркнут, а числа 2 и 3 одновременно и простые и вида 2^r , 3^r .

2. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n}(n+1)$ обозначим через k_2^* . Имеем

$$k_2^* \leq \pi(2n) - \pi(n) + 2,$$

а суммарное количество зачеркнутых столбцов будет

$$k_2 \leq \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) + [\log_2 \sqrt{n}] + [\log_3 \sqrt{n}],$$

так как среди чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$ есть одно число вида 2^r , и возможно есть еще одно число вида 3^r . Расставляя столбцы матриц как в теореме 7.1 и учитывая, что число 1 не простое, получим

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) + [\log_2 \sqrt{n}] - [\log_3 \sqrt{n}] - 1.$$

Теорема 7.3 доказана.

Следствие 7.1 Уравнение $\pi(2x) = 2\pi(x)$ имеет ровно 2 решения: $x_1 = 4$, $x_2 = 10$.

Доказательство следует из факта, что наша математика 10-иричная.

Теорема 7.4 Для любого натурального n

$$\pi(n(n+1)) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 n \right\rfloor - \nu(2n). \quad (7.6)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n+1)$, где $m = \pi(n)$. Так как столбцы, соответствующие числам $n+1, n+2, \dots, n^2$ у матриц общие, можем их не учитывать а сразу сопоставлять матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(n^2+1)$, где $m = \pi(n^2)$. Зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум один нуль в строках $1 < i \leq m$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n}(1)$ будет

$$k_1^* = [\log_2 n] + 1,$$

а количество зачеркнутых столбцов будет $k_1 = n - k_1^*$.

2. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n}(n^2+1)$ обозначим через k_2^* . Учтем, что все четные столбцы в матрице $M_{m,n}(n^2+1)$ зачеркнуты, а из нечетных столбцов не зачеркнуты только те, которым соответствуют простые числа P_q , лежащих в интервале $n^2 < P_q < n(n+1)$. Заметим, что для нечетных n количество четных столбцов матрицы $M_{m,n}(n^2+1)$ на 1 больше, чем количество четных столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$, а количество нечетных столбцов на 1 меньше, чем количество нечетных столбцов матрицы $M_{m,n}(1)$.

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулей (вначале незачеркнутые, а потом зачеркнутые) и учитывая, что $k_2^* = \pi(n(n+1)) - \pi(n^2)$, получим

$$k_2^* = \pi(n(n+1)) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rfloor - \nu(2n).$$

Теорема 7.4 доказана.

Следствие 7.2

$$\pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \geq \pi(2n) - \pi(n) - \left\lfloor \frac{[3 \log_2 n]}{2} \right\rfloor - 2.$$

$$\left\lfloor \frac{(\pi(2n) - \pi(n) - 1)}{3} \right\rfloor - 1 \leq \pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \leq \left\lfloor \frac{(\pi(2n) - \pi(n) + 1)}{2} \right\rfloor + 1,$$

$$[\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \leq \pi(n) - \left\lfloor \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rfloor + 2.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству Теоремы 7.4, рассмотрением матриц $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(2n+1)$, где $m = \pi(n)$ и сопоставлением матриц $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(n^2+1)$, где $m = \pi(n)$.

7.4 Симметричные матрицы остатков, симметричность чисел на числовой оси

Так как четные числа (по отношению начала числовой оси) относительно нечетных, перемещены на единицу вправо (или влево, смотря в какую сторону смотреть), поэтому математика на числовой оси стала однобокой, а математические действия приобрели направление (к примеру: сложение и умножение - в правую сторону, а вычитание и деление - в левую) и результаты математических операций стали некоммутативными, т.е. относительными.

Мне совершенно непонятно, число “минус” $2n$ является четным или нечетным?! Ведь знак "минус" показывает только направление! Однобокий подход консервативных математиков к нулю как числу превращал ее в фикцию, и числа на числовой оси становились равноправными.

От этих недостатков свободна матричная математика, в которой введено глобальное понятие натурального нуля O_n в матрице $M_{m,2n+1}(O_n)$, где $\nu_m^*(O_n) = \pi(n)$. В матричной математике, ограничивая отрезок числовой оси, определяют поведение математических операций на этом отрезке, а затем распространяют их на большие отрезки. Для этого в матричной математике создано основополагающее понятие матрицы остатков, где нулевой остаток уже не фикция, а реальный объект.

Чтобы четные и нечетные числа были расположены симметрично относительно какой-нибудь точки в матричной математике рассматривают матрицу остатков с нечетным числом столбцов. Средний столбец такой матрицы становится осью симметрии. В матричной математике фундаментальное значение имеет матрица $M_{m,2n+1}(O_n)$, где $m = \pi(n)$, крайние столбцы которой соответствуют числам O_n и $2n$, а средний столбец – числу n , четность которого не всегда зависит от четности крайних столбцов. Поэтому матричная математика показывает, что четность на числовой оси понятие относительное, что приводит к относительности всех математических операций на числовой оси.

7.5 Проблема Шинцеля

В [1] подробно объяснено, какое важное значение имеет распределение простых чисел в арифметических прогрессиях.

Теорема 7.5 *Арифметическая прогрессия $ax_i + b_i$, где $1 \leq b_i < a$, $(a, b_i) = 1$ содержит не менее чем*

$$\left[\frac{[\log_2 a]}{2} \right] - 1$$

простых чисел, если $0 \leq x_i \leq a$.

Доказательство проведем в рамках матричной математики. Рассмотрим матрицы $N_{m,p}(p|p)$ и $N_{m,p}(p \dagger p + b_i)$ как матрицы с шагом p , где $m = \pi(p-1)$. Матрицу $M_{m,p^2}(p)$ можно представить в виде

$$M_{m,p^2}(p) = N_{m,p}(p|p) + N_{m,p}(p \dagger p + b_i),$$

где $1 \leq b_i \leq p-1$, и p - простое число. Следовательно, в матричной математике матрицы вида $M_{m,p^2}(p)$, где $m = \pi(p-1)$, как и прогрессия $px_i + b_i$, где $1 \leq b_i < p$ содержат все простые числа p_k , где $p < p_k < p^2$. В матрицах $N_{m,p}(p|p)$ и $N_{m,p}(p \nmid p+b)$, составленных из чисел $p, 2p, \dots, p^2$ и $p+b, 2p+b, \dots, p^2+b$ зачеркнем те столбцы, которые имеют минимум один нуль в строках $1 < i \leq m$.

1. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $N_{m,p}(p|p)$ будет

$$k_1^* = [\log_2 p] + 2,$$

а количество зачеркнутых столбцов будет $k_1 = p - [\log_2 p] - 2$.

2. Количество незачеркнутых столбцов в матрице $N_{m,p}(p \nmid p+b)$ обозначим через k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим через k_2 . Учтем, что не все четные столбцы в матрице $N_{m,p}(p|p)$ зачеркнуты, а из нечетных столбцов не зачеркнуты только те, которым соответствуют простые числа p и p^2 . Заметим, что для нечетных n количество четных столбцов матрицы $N_{m,p}(p|p)$ на 1 больше, чем количество четных столбцов матрицы $N_{m,p}(p \nmid p+b)$, а количество нечетных столбцов на 1 меньше, чем количество нечетных столбцов матрицы $N_{m,p}(p \nmid p+b)$. Следовательно,

$$k_2 \leq k_1 + \left\lceil \frac{[\log_2 p] + 2}{2} \right\rceil,$$

так как количество зачеркнутых четных столбцов матрицы $N_{m,p}(p \nmid p+b)$ от количества нечетных столбцов матрицы $N_{m,p}(p|p)$ не могут быть больше, чем $\left\lceil \frac{[\log_2 p]}{2} \right\rceil$, потому что их всего $[p/2]$. Однако имеем

$$G(m, n, p) = \overline{N}_{m,p}(p \nmid p+b) - \overline{N}_{m,p}(p|p).$$

Следовательно, $k_2^* \geq \left\lceil \frac{[\log_2 p]}{2} \right\rceil - 1$. Таким образом k_2^* показывает количество простых чисел, которые соответствуют столбцам матрицы $N_{m,p}(p \nmid p+b)$. Следовательно, k_2^* показывает те члены арифметической прогрессии $px_i + b$, которые соответствуют простым числам. Таким образом, теорема доказана для простых p .

Для составного числа a рассмотрим матрицы $N_{m,a}(a|a)$ и $N_{m,a}(a \nmid a+b)$, где $1 \leq b < a$, $(a, b) = 1$. Зачеркнем еще те столбцы, которые имеют минимум один нуль в строках соответствующих простым делителям числа a . Продолжая аналогично доказательству для случая $a = p$ получим, что Проблема Шинцеля с помощью матричной математики не только доказывается, но и серьезно усиливается.

Литература

- [1] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.
- [2] Rankin R. A. "The difference between consecutive prime numbers," London Math. Soc. 13 (1938), 242–247.
- [3] Арнольд И. В. Теория чисел, Гостехиздат, Москва, 1939.
- [4] Мкртумян Э. Л. О простых числах в специальных промежутках, глава 1 данного сборника.

Глава 8

Проблема Гольдбаха

В статье дается краткое и независимое решение проблемы Гольдбаха методом матриц остатков, который разработан автором. Выявлены некоторые аспекты глубинной сущности проблемы.

8.1 Введение

Гольдбах в 1742г высказал предположение, что любое четное число, большее 4 можно представить в виде суммы двух простых чисел, а любое нечетное число, большее 7 можно представить в виде суммы трех простых чисел [1].

В настоящее время доказаны следующие утверждения:

Предложение 8.1 *Существует число N , что любое нечетное число, большее N представимо в виде суммы трех простых чисел.*

Предложение 8.2 *“Почти все” четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел, точнее говоря, количество четных чисел не превосходящих x , которые не представимы в виде суммы двух простых чисел, имеет порядок $O(x/\ln^A x)$ при $x \rightarrow \infty$, где A – некоторое положительное число (не обязательно целое).*

Заметим что константа в $O(x/\ln^A x)$ может существенно зависеть от A .

Сначала Харди и Литлвуд [1] доказали эти утверждения с помощью до сих пор не доказанной гипотезы. И. М.Виноградову, [1], [2] удалось доказать эти утверждения независимо от этой гипотезы. Эти все доказательства очень сложны и громоздки.

В настоящей главе дается краткое и независимое решение проблемы Гольдбаха для всех чисел методом матриц остатков, который разработан автором. Выявлены некоторые аспекты глубинной сущности проблемы.

8.2 Матрицы остатков

Рассмотрим следующую матрицу, которую называем матрицей остатков:

$$M_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

где $a_{i,j}$ - остаток от деления числа $j - 1$ на P_i , P_i - i -тое простое число, $n \geq 2$ - натуральное число, $m = \pi(n)$ - количество простых чисел, не превосходящих n , $1 \leq$

$j \leq n, 1 \leq i \leq m$. Например,

$$M_{m,7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

Для любого натурального n матрица остатков обладает следующими свойствами:

1) В первом столбце только нули, их количество равно $m = \pi(n)$.

1а) Во втором столбце только единицы, их количество равно $m = \pi(n)$.

2) Последний n -ый столбец матрицы $M_{m,n}$ содержит $\nu(n-1)$ нулей, где $\nu(n)$ – количество различных простых делителей числа n .

3) Если число $n-1$ простое, то последний n -ый столбец матрицы $M_{m,n}$ содержит ровно 1 нуль и этот нуль в последней строке.

Рассмотрим теперь передвинутую матрицу остатков $M_{m,n}(\lambda)$, которая получается сдвигом столбцов матрицы $M_{m,n} = M_{m,n}(0)$ на λ столбцов направо, где $\lambda \geq 0$ – целое число. Элемент $a_{i,j}$ матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ есть остаток от деления числа $\lambda_j = \lambda + j - 1$ на P_i , P_i – i -тое простое число, $n \geq 2$ – натуральное число, $m = \pi(n)$ – количество простых чисел, не превосходящих n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Например,

$$M_{m,7}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Свойство 2) для сдвинутых матриц имеет вид:

2а) Последний n -ый столбец матрицы $M_{m,n}(1)$ содержит $\nu(n)$ нулей,

Обозначая

$$c(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1),$$

имеем [3]

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) &= \overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) - (\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1)) = \\ &= \pi(n) - \nu(n) - c(m, n, \lambda), \end{aligned} \quad (8.1)$$

Отсюда получаем

$$0 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

8.3 Средний столбец матрицы остатков и его свойства

Определение 8.1 Средним столбцом матрицы остатков называется столбец, равноудаленный от крайних столбцов данной матрицы.

Определение 8.2 Дальность столбцов в матрицах остатков рассчитывается количеством столбцов, которые находятся между ними.

Очевидно, что матрица остатков $M_{m,n}(\lambda)$ обладает средним столбцом тогда и только тогда, когда n – нечетное. Матрица остатков $M_{m,n}(\lambda)$ обладает средним столбцом, когда крайние столбцы соответствуют числам одинаковой четности.

Отметим очевидное, но важное свойство: Если из двух концов матрицы, обладающей средним столбцом, зачеркнуть равное количество столбцов, то средний столбец матрицы незачеркнутых столбцов совпадает со средним столбцом прежней матрицы.

Заметим, что средний столбец матрицы остатков может совпадать со средним столбцом другой матрицы остатков с другими размерами. Например, у матрицы остатков $M_{m,2n-1}(1)$, $m = \pi(n)$ крайние столбцы соответствуют числам 1 и $2n - 1$, а средний столбец соответствует числу n и совпадает со средним столбцом матрицы $M_{m,2n+1}(O_n)$, где $m = \pi(n)$, $O_n = \prod_{i=1}^m P_i$.

Самая маленькая матрица остатков, которая обладает средним столбцом, имеет три столбца.

8.4 Средний столбец матрицы и проблема Гольдбаха

Теорема 8.1 *а) Любое натуральное составное четное число представимо в виде суммы двух простых чисел,*

б) Любое натуральное четное число большее 6 представимо в виде суммы двух различных простых чисел,

с) Любое натуральное четное число большее 8 представимо в виде суммы трех различных простых чисел,

д) Любое натуральное нечетное число большее 5 представимо в виде суммы трех простых чисел,

е) Любое натуральное число большее 17 представимо в виде суммы трех различных простых чисел,

Доказательство. Достаточно доказать свойство а) или е), остальные из них следуют. Рассмотрим матрицу остатков $M_{m,2n-1}(1)$, где $m = \pi(n)$. Такая матрица обладает средним столбцом, так как имеет нечетное количество столбцов. Два столбца матрицы $M_{m,2n-1}(1)$ назовем симметричными, если они равноудалены от среднего столбца. Очевидно, сумма чисел соответствующих симметричным столбцам равна $2n$, где n - соответствует среднему столбцу.

Зачеркнем все столбцы матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, номера которых соответствуют составным числам. При этом не зачеркиваем средний столбец, который соответствует числу n . Фактически проводим метод решета для чисел $1, 2, 3, \dots, 2n - 1$, не зачеркивая числа n .

При любой четности числа n , слева от среднего столбца останутся незачеркнутыми столбцы, номера которых соответствуют простым числам P_i , где $2 \leq P_i < n$, а также первый столбец (единица не простое и не составное число). Таким образом слева от среднего столбца количество незачеркнутых столбцов будет $\pi(n)$. Справа от среднего столбца останутся незачеркнутыми столбцы, номера которых соответствуют простым числам P_k , где $n < P_k < 2n$. Таким образом справа от среднего столбца количество незачеркнутых столбцов будет $\pi(2n) - \pi(n)$.

Например, при $n = 11$, имеем $m = \pi(11) = 5$. В матрице $M_{m,2n-1}(1) = M_{5,21}(1)$ слева от среднего столбца $n = 11$ незачеркнутым столбцам соответствуют числа 1, 2, 3, 5, 7; а справа от среднего столбца незачеркнутым столбцам соответствуют числа 13, 17, 19. Если $2n - 1$ - простое число, то его не рассматриваем, так как его симметричным будет незачеркнутый первый столбец. Итак, справа от среднего столбца имеем 3 незачеркнутых столбца, которым соответствуют числа 13, 17, 19. Слева им соответствуют 3 симметричных нечетных столбца. Но слева от среднего столбца имеем только 1 зачеркнутый нечетный столбец, соответствующий составному числу 9, симметричным ему (по отношению n) будет 13-й столбец. Следовательно, кроме 11-ого столбца, есть еще две пары симметричных незачеркнутых столбцов (17 и 5) и (19 и 3), а сумма чисел соответствующих симметричным столбцам равна $2n = 22$.

Очевидно, что столбец симметричный незачеркнутому столбцу может быть как зачеркнутым, так и незачеркнутым. Остается доказать, что для любого n существует минимум одна пара симметричных незачеркнутых столбцов (а сумма чисел соответствующих симметричным столбцам равна $2n$) и проблема Гольдбаха будет решена.

В случае основной матрицы $M_{m,2n+1}(O_n)$, где $m = \pi(n)$, крайние столбцы которой соответствуют числам O_n и $2n$, справа от среднего столбца имеем $\pi(2n) - \pi(n)$ незачеркнутых столбца. Слева им соответствуют $\pi(2n) - \pi(n)$ симметричных нечетных столбца. Но в матрице могут быть незачеркнутые простые столбцы p_i^* и p_k^* , которые относительно среднего столбца расположены симметрично и $p_i^* + p_k^* = 2n$. Примером такой пары могут служить незачеркнутые столбцы p_i и p_k , находящиеся на ближайших расстояниях от среднего столбца n (в ту или другую сторону), если расстояние от p_i до числа 1 будет равно расстоянию от p_k до числа $2n - 1$, или если расстояние от p_k до числа 1 будет равно расстоянию от p_i до числа $2n - 1$. Потому что при любой четности числа n четные и нечетные столбцы будут расположены равноудаленно от n (дальность считается по количеству столбцов).

Так как в матрице $M_{m,2n-1}(1)$ четные столбцы по отношению к нечетным столбцам передвинуты на единицу вправо и количество четных столбцов (соответствующих четным числам) в матрице $M_{m,2n-1}(1)$ на единицу меньше, чем количество нечетных столбцов, то справа от n зачеркнуто на $2 \left\lceil \frac{[\log_2 n] + 1}{2} \right\rceil - 1$ больше столбцов, чем слева, поэтому независимо от четности числа n , не только четные столбцы расположены симметрично относительно столбца n , но и нечетные. В матрице $M_{m,2n-1}(1)$ зачеркивая еще те столбцы p_k , которые симметрично расположены каким-то составным столбцам из интервала $[1, n]$ и те столбцы p_i , которые расположены симметрично каким-то другим составным столбцам из интервала натуральных чисел $[n, 2n - 1]$. Заметим, что в матрице $M_{m,2n-1}(1)$ остались еще не одна пара p_i^* и p_k^* столбцов, которые симметричные и $p_i^* + p_k^* = 2n$. Это объясняется тем, что симметричность столбцов на числовой оси, у матрицы имеющего среднего столбца, однозначное, т.е. столбец из интервала $[1, n]$ может быть симметричным только одному столбцу из интервала $[n, 2n - 1]$. Поэтому при $n > 5$, имеем

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq [\log_2 n] - 1, \quad (8.2)$$

или

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lceil \frac{\pi(n) + [\log_2 n] + 1}{2} \right\rceil - \nu(2n). \quad (8.3)$$

Сопоставляя значения формул (8.2), (8.3) и учитывая $\nu(n - 1)$, $\nu(n)$, $\nu(n + 1)$ или $\nu(2n - 1)$, $\nu(2n)$, $\nu(2n + 1)$, придем к доказательству пунктов а), б) и с) Теоремы 8.1.

Что касается пунктов d) и e), то их можно получить из пунктов а), б) и с), вычитая из любого нечетного числа простое, и представляя полученное четное число в виде суммы двух простых чисел. То же самое можно получить рассматривая столбцы матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, где $m = \pi(n)$, которые соответствуют числам $2n - 4$, $2n - 3$, $2n - 2$, $2n - 1$ и $2n$. Из простых делителей этих чисел всегда можно найти 3 таких, сумма которых была бы $2n - 1$. Таким образом, Теорема 8.1 полностью доказана.

Теорема 8.2 Любое натуральное составное четное число $2n$ представимо в виде суммы двух простых чисел не менее, чем $\frac{1}{2} [\log_2 n]$ раз.

Доказательство.

1) Вначале допустим, что $n = p$ - простое число. Нужно ответить на вопрос: кроме $p + p = 2p = 2n$ могут ли быть еще пары разных простых чисел p_i и p_k , для которых

$$p_i + p_k = 2p = 2n, \quad (8.4)$$

и сколько могут быть еще таких пар?

В силу свойств соотношений (1.6), (8.2) и (8.3) имеем

$$|L_m(p_i) - L_m(p_k)| = |\nu_m^*(p_i) - \nu_m^*(p_k)| = 1, \quad (8.5)$$

$$|L_m(2^r) - L_m(p_i)| = |\nu_m^*(2^r) - \nu_m^*(p_i)| = 0, \quad (8.6)$$

$$|L_m(2^r) - L_m(p_k)| = |\nu_m^*(2^r) - \nu_m^*(p_k)| = 1, \quad (8.7)$$

где $1 < 2^r < p$. Так как равенства (8.5) - (8.7) справедливы для всех сочетаний столбцов (чисел) 2^r , p_i и p_k , то учитывая (8.2) - (8.7) приходим к выводу, что количество пар разных простых чисел p_i и p_k , для которых $p_i + p_k = 2n$, не менее, чем $\frac{1}{2} [\log_2 n]$, потому что простые числа вида $p_i^* = 2^r \pm 1$, $p_i^* < p$ имеют своих напарников p_k^* , где $p_i^* + p_k^* = 2p$.

2) Допустим, что n - составное число. Так как количество простых чисел p_i , имеющих симметричных (относительно среднего столбца) напарников из простых чисел p_k , зависит от величины $[\log_2 n]$, которая мало отличается от случая $n = p$, следовательно, учитывая (8.2)-(8.7)), получим доказательство Теоремы 8.2.

Таким образом, проблема Гольдбаха полностью решена и значительно усилена!

Примечание. Если бы проблема Гольдбаха была бы сформулирована как:

Любое натуральное четное число представимо в виде разности двух простых чисел,

то его доказательство было бы намного легче, изменилась бы трактовка числовой оси со стороны математиков и математика без лишних затруднений обошлась бы только целыми числами.

P.S. Доказательство проблемы Гольдбаха профессором Виноградовым воспринимается по-разному. На самом деле профессор Виноградов доказал проблему Гольдбаха или опроверг?! Ведь число, больше которого все четные числа представимы в виде суммы двух простых чисел, столь велико, что даже при современной технике невозможно его определить! Получается, что есть огромное количество четных чисел, про которых это доказательство ничего не говорит. Не говоря уже про отрицательных четных чисел. Из всего этого следует, что, по логике существующей математики, отрицательные четные числа также не существуют как и не существуют отрицательные простые числа. Но разве это не противоречит первоначальному определению числовой оси и не приводит к абсурду основную аксиому существующей (классической) математики, которая гласит, что “число ноль 0” кратно всем целым числам ?!

Мне кажется, независимо от всего, профессор Виноградов доказал, что существующая математика беспомощна для решения задач, в которых рассматриваются взаимоотношения объектов, имеющих “бесконечно большие” и “бесконечно малые” размеры. Такой вывод мне кажется намного ценнее, чем само доказательство проблемы Гольдбаха!

Ереван, 2013.

Литература

- [1] Прахар К. Распределение простых чисел М.: Наука, 1967.
- [2] Арнольд И. В. Теория чисел М.: Наука, 1939.
- [3] Мкртумян Э. Л. Главы 1 и 6 настоящего сборника.

Глава 9

Свойства матриц остатков

Определение 9.1 Матрицы остатков, имеющие одинаковые размеры, ширина $\pi(n)$, длина n , называются подобными.

Пример. Матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| > 0$, λ_1, λ_2 - натуральные числа.

Определение 9.2 Подобные матрицы, имеющие общие столбцы, называются сдвинутыми матрицами остатков.

Пример. Матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n)$, $1 < |\lambda_1 - \lambda_2| < n$.

Определение 9.3 Подобные матрицы, не имеющие общих столбцов, называются противоположащими матрицами остатков.

Пример. Матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $|\lambda_1 - \lambda_2| > n$.

Теорема 9.1 Матрицу $M_{m,kn}(1)$, где $m = \pi(n)$, $n > k$ - натуральное число, можно представить как сумму k противоположащих матриц, в каждой из которых n столбцов.

Доказательство очевидно, т.к.

$$M_{m,kn}(1) = M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + M_{m,n}(2n+1) + \dots + M_{m,n}(n(k-1)+1).$$

Теорема 9.2 Матрицу $M_{m,2n}(1)$ где $m = \pi(n)$ можно представить как сумму четной и нечетной матриц.

Доказательство тривиально, т.к.

$$M_{m,2n}(1) = N_{m,n}(2 \nmid 1) + N_{m,n}(2|2), \quad m = \pi(n).$$

Теорема 9.3 Если один из крайних столбцов и средний столбец матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, λ - натуральное число, содержит нулевой остаток в любой строке $1 < i \leq m$, то и другой крайний столбец этой же матрицы содержит нулевой остаток в этой же строке.

Доказательство. Допустим λ_a и λ_b соответствуют крайним столбцам, а λ_c - среднему столбцу матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$

1) Допустим $2 \nmid \lambda_a, 2 \nmid \lambda_b$,

но $p_i | \lambda_a$ и $p_i | \lambda_c$, где $2 < p_i \leq n$ - простое число. Следовательно, $p_i | \lambda_b$ и обратно.

2) Допустим $2 | \lambda_a, 2 | \lambda_b$, но $p_i | \lambda_b$ и $p_i | \lambda_c$, где $2 < p_i \leq n$ - простое число, следовательно, $p_i | \lambda_a$ и обратно.

Следствие 9.1 Если $p_i | \lambda_a, p_i | \lambda_b, p_i | \lambda_c$, то $p_i | n$ и число $\lambda + n$ соответствует среднему столбцу матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$.

Доказательство тривиально вытекает из доказательства Теоремы 1.3.

Следствие 9.2 Средний столбец матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, не имеет нулевого остатка в строках $1 < i < m$, если хоть один из крайних столбцов не имеет нулевых остатков в строках $1 < i \leq m$.

Доказательство. По Теореме 9.3 известно, что если в матрице $M_{m,2n+1}(\lambda)$ число n содержит простой нечетный делитель $p_i \leq n$, тогда $(\lambda_a, \lambda_c) \neq 1$, $(\lambda_a, \lambda_b) \neq 1$, $(\lambda_b, \lambda_c) \neq 1$, т.е. имеют общий делитель. Следовательно, $(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) \neq 1$. Но если λ_a или λ_b не имеют общего простого нечетного делителя $p_i \leq n$, то тогда получим $(\lambda_a, n) = 1$, $(\lambda_b, n) = 1$, (т.е. λ_a и λ_b взаимно простые числа), следовательно, $(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) = 1$.

Теорема 9.4 Если средний столбец матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, где $m = \pi(n)$, в строках $1 < i \leq m$ содержит минимум два нулевых остатка, то один из этих нулевых остатков находится в строке $i = 2$ или в строке $i = 3$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,2n+2}(0_n)$. Здесь 0_n - натуральный ноль

$$0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n).$$

Эту матрицу получаем из матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, прибавляя к ней с двух сторон по столбцу, которые соответствуют числам 0_n и $2n$. Ясно, что средние столбцы у этих двух матриц совпадают и соответствуют числу n .

1) Пусть $2 \nmid n$.

а) При $3|n$ теорема ясна, т.к. по условию теоремы $n \neq 3^r$.

б) При $3 \nmid n$, или $3|n - 1$ или $3|n + 1$. В том и в другом случаях $5|n$, т.к. $5|0_n$ и $n \neq 5^r$.

2) Пусть $2|n$, рассуждая также, приходим к выводу, что теорема доказана.

Следствие 9.3 Если средний столбец матрицы $M_{m,2n-1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, в строках $1 < i \leq m$ содержит минимум два нулевых остатка, то один из этих нулевых остатков находится в строке $i = 2$ или в строке $i = 3$.

Доказательство. Так как при любой четности λ число n соответствует среднему столбцу матрицы $M_{m,2n-1}(\lambda)$, то доказательство Следствия тривиально.

Глава 10

Квадратные матрицы. Фокусы матриц остатков

Определение 10.1 Матрица остатков $M_{m,n}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$ называется квадратной, если количество ее столбцов n равно полному квадрату натурального числа.

Определение 10.2 Если столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ имеет нулевые остатки в тех же строках, что и крайние столбцы этой же матрицы, то такой столбец называется фокусом, а крайние столбцы называются побочными фокусами этой матрицы.

Например, для $\lambda = 9$, $n = 8$, $m = \pi(4) = 2$ матрица $M_{2,8}(9)$ имеет вид

$$M_{2,8}(9) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Столбец, соответствующий числу 12, является фокусом.

Теорема 10.1 Для любого числа a матрица остатков $M_{m,2a+2}(a^2)$, $m = \pi(a+1)$ обладает фокусом (а значит и побочными фокусами).

Доказательство. Матрица $M_{m,2a+2}(a^2)$, $m = \pi(a+1)$ составлена из чисел $a^2, a^2 + 1, \dots, (a+1)^2 = b^2$. Первый столбец соответствует числу a^2 , которое делится на a . Последний столбец соответствует числу b^2 , которое делится на $b = a+1$. Следовательно, столбец, соответствующий числу $a(a+1)$, является фокусом, а столбцы, соответствующие числам a^2 и b^2 , являются побочными фокусами. Теорема доказана.

Теорема 10.2 Разность квадратов двух натуральных чисел обладает фокусом.

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,a^2}(1)$ и $M_{m,b^2}(1)$, где $0 < a < b$, $m = \pi(b)$.

Так как имеет место равенство

$$\nu(a^2b^2) = \nu(a^2) + \nu(b^2) = \nu(ab) = \nu(a) + \nu(b).$$

Пусть s - фокус разности матриц $M_{m,a^2}(1) - M_{m,b^2}(1)$. Тогда, в зависимости от величины разности $(b-a)$, имеют место соотношения

- 1) $a^2 < s < b^2$, если $a^2 < ab < b^2$.
- 2) $a < s < a^2$, если $a < \frac{b}{2}$.

Теорема 10.3 Имеет место соотношение

$$\pi(n) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) + 1. \quad (10.1)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(2n+1)$, где $m = \pi(n)$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых содержит как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m$. Тогда имеем

1) В матрице $M_{m,2n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* \geq [\log_2 n] + 1 + \pi(2n) - \pi(n).$$

При этом учтено, что столбец, соответствующий числу 1, тоже не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,2n}(2n+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi(4n) - \pi(2n) + 1.$$

Расставим столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (10.1). Это следует из того, что

$$\overline{M}_{m,2n}(2n+1) - \overline{M}_{m,2n}(1) = c(m, n, 2n+1).$$

Теорема 10.4 *Имеет место соотношение*

$$2[\log_2 n] - 1 \leq \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) \leq 2[\log_2 n] + 1. \quad (10.2)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы

$$N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1) \text{ and } N_{m,\lambda}(2|2), \quad \lambda = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil, \quad \pi((n-1)^2).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых содержит как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq \pi((n-1)^2) = m$. Тогда имеем

1) В матрице $N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) + 1.$$

2) В матрице $N_{m,\lambda}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = 2[\log_2 n].$$

Расставим столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (10.2).

Следствие 10.1 *Имеет место соотношение*

$$\left\lceil \frac{\pi(n) + [\log_2 n] - 1}{2} \right\rceil - 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) + 1. \quad (10.3)$$

Доказательство.

Рассмотрим матрицы $N_{m,2n}(2|2)$ и $N_{m,2n}(2 \uparrow 1)$, где $m = \pi(2n)$, $m^* = \pi(n)$.

1) В матрице $N_{m,2n}(2 \uparrow 1)$ зачеркнем все те столбцы, каждый из которых соответствует составному числу. Количество незачеркнутых столбцов в ней есть

$$k_1^* = \pi(4n).$$

2) Матрица $N_{m,2n}(2|2)$ четная, поэтому каждый ее столбец делим еще на квадрат простого числа p_q , где $2 < p_q \leq \sqrt{4n}$. Полученные остатки занесем в соответствующие столбцы этой матрицы. Зачеркнем все те столбцы этой матрицы, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатков $1 < i < m$, $1 < i^* < m^*$. Количество незачеркнутых столбцов в ней станет равным

$$k_2^* = \pi(2n) + [\log_2 n] + 2.$$

т.к. среди чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$ есть только одно число вида 2^r .

Расставим столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (10.3).

Глава 11

Средняя матрица остатков. Симметричные матрицы

Определение 11.1 Матрица, обладающая средним столбцом, который соответствует натуральному числу, называется *средней матрицей*.

Теорема 11.1 Если матрица обладает средним столбцом, то она обладает и *средней матрицей*.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,2n+1}(\lambda)$, $m = \pi(n)$. Она обладает средним столбцом, потому что при любой четности числа λ ее крайние столбцы соответствуют числам одинаковой четности. При $2|\lambda$ то и $2|\lambda + 2n$, а при $2 \nmid \lambda$ то и $2 \nmid \lambda + 2n$.

Из краев этой матрицы зачеркивая одинаковое число n_1 столбцов, где $1 \leq n_1 < n$, матрица образованная из незачеркнутых столбцов станет *средней матрицей* остатков прежней матрицы.

Следствие 11.1 Матрица, обладающая средним столбцом, обладает определенным количеством *средних матриц*, самая малая из которых содержит 3 столбца.

Это очевидно из Теоремы 11.1.

Следствие 11.2 Любое число может стать *средним столбцом* определенного количества *средних матриц*.

Доказательство. Возьмем любое натуральное число N . Разделим это число на простые числа $\pi(n)$, $n < N$. Из полученных остатков составим столбец N , который соответствует числу N . Разделив числа $(N - n)$, $(N - n + 1), \dots, N + n$ на простые числа $\pi(n)$, составим из их остатков столбцы, которые вместе со столбцом N образуют матрицу $M_{m,2n+1}(\lambda - n)$, $m = \pi(n)$. Эти столбцы расположены с двух сторон столбца N . Эта новая матрица есть *средняя матрица* исходной матрицы $M_{m,2N+1}(1)$, $m = \pi(n)$. Средний столбец этой матрицы соответствует числу N . Следствие 11.2 доказано.

Следствие 11.3 Если из двух сторон матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, *средний столбец* которой соответствует числу λ^* зачеркнуть столбцы

$$\lambda^* - n_1, \lambda^* - n_1 + 1, \dots, \lambda^*, \lambda^* + 1, \dots, \lambda^* + n_1,$$

где $1 < n_1 < n$, то незачеркнутые столбцы совместно со столбцом λ^* будут образовывать матрицу, которая есть *средняя матрица* прежней матрицы.

Доказательство тривиально.

Замечание. Теорема 11.1 своими следствиями ограничивает „положительный“ участок числовой оси, который подлежит изучению. Но принимая число 0_n как натуральное можно свойства среднего столбца и средней матрицы распространить и на отрицательный участок числовой оси, считая 0_n средним столбцом матрицы, крайние столбцы которой соответствуют числам $-a$ и $+a$.

Теорема 11.2 Средний столбец матрицы $M_{m,p^2}(1)$, где $2 < p$ - простое число, $m = \pi(p)$, соответствует простому числу P_k , $P_k > P$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$. Так как ее крайние столбцы соответствуют нечетным числам, то она обладает средним столбцом. Обозначим его λ^* . С двух сторон этой матрицы зачеркнем те столбцы, которые имеют нулевые остатки в строках $1 \leq i \leq m$.

Заметим, что число λ^* не зачеркнуто, потому что, не может содержать простых нечетных делителей $\leq p$. Так как λ^* есть и средний столбец матрицы $M_{m,p^2+2}(0_n)$. В противном случае получим, что число 1 составное. Число λ^* находится на равных расстояниях от числа 0_n и от числа $p^2 + 1$. Но его не нужно путать со средним арифметическим чисел 1 и p^2 , или (-1) и p^2 . Поэтому делитель числа λ^* находится не в столбце, который соответствует числу $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$, $n = p$, а в столбце, который соответствует числу 0 (ноль), и считаем, что оно кратно всем числам.

Число λ^* получит нулевой остаток только тогда, когда ширина матрицы $M_{m,p^2}(1)$ станет равной m_* , т.е. когда мы будем иметь $m = m_* = \pi(\lambda^*)$.

Таким образом получаем, что λ^* не имеет простого делителя $\leq [\sqrt{2p^2}]$, следовательно λ^* - простое число. Теорема 11.2 доказана.

Следствие 11.4 Если число $p^2 - 1$ не кратно 5, то число $p^2 + 1$ кратно 5, где p - простое число.

Доказательство. Если число p^2 заканчивается цифрой 1 (p заканчивается цифрой 1 или 9), то число $p^2 - 1$ кратно 5. А если число p^2 заканчивается цифрой 9 (p заканчивается цифрой 3 или 7), $p^2 + 1$ кратно 5. Следствие доказано.

Теорема 11.3 Уравнение

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad (11.1)$$

где $0 < x < y < z$, $(x, y) = 1$, $(x, z) = 1$, $(y, z) = 1$, имеет решение в целых числах, если хотя одно из этих чисел не содержит более двух простых нечетных делителей.

Доказательство.

Известно, что числа

$$z = a^2 + b^2, y = a^2 - b^2, x = \sqrt{2ab} \quad (11.2)$$

удовлетворяют уравнению (11.1) тогда и только тогда, когда a и b числа различной четности и $(a, b) = 1$.

Симметричность уравнения (11.2) позволяет рассмотреть случай

1) $2 \nmid a$, $2 \mid b$, $2 \nmid c$.

2) $2 \nmid a$, $2 \nmid b$, $2 \mid c$.

Потому что одно из чисел a, b, c должно быть четным.

Рассмотрим фокусы матриц, составленных из чисел $z^2 - a^2 = b^2$ и $z^2 - b^2 = a^2$ (См. Теорему 10.2).

Нетрудно убедиться, что условие $(a, z) = 1, (z, b) = 1, (a, b) = 1$ необходимо, но не достаточно, чтобы числа a, b, c удовлетворяли уравнению (11.1). Потому что в формуле (11.2) значение x должно быть рациональным (целым положительным числом). Учитывая Теоремы 9.3, 9.4, получаем $a = 2^r, b = p^s$, где p - простое число, $2 \nmid r, 2 \mid s$, но s может быть и равным 0 (нулю).

Определение 11.2 Подобные матрицы, которые в строках $1 < i \leq t = \pi(n)$ имеют равное количество нулевых и ненулевых остатков, называются симметричными матрицами остатков.

Теорема 11.4 Матрица остатков, обладающая средним столбцом, обладает определенным количеством симметричными матрицами.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m, kn}(1)$, где $2 \mid k, 2 \nmid n, 1 < k \leq n - 1, t = \pi(n)$. Она обладает средним столбцом, т.к. ее крайние столбцы соответствуют нечетным числам.

Представим матрицу $M_{m, kn}(1)$ в виде

$$\begin{aligned} M_{m, kn}(1) &= M_{m, n}(1) + M_{m, n}(n+1) + \dots + M_{m, n}(kn+1) = \\ &= M_{m, 2n}(1) + M_{m, 2n}(2n+1) + \dots + M_{m, 2n}(kn+1) = \\ &\dots \dots \dots \dots \\ &= M_{m, \lambda}(1) + M_{m, \lambda}(\lambda+1) = N_{m, \lambda}(2 \nmid 1) + N_{m, \lambda}(2 \mid 2). \end{aligned}$$

где $\lambda = \left\lfloor \frac{kn}{2} \right\rfloor$.

Нетрудно заметить, что все матрицы

$$M_{m, n}(n+1), \dots, M_{m, n}(kn+1)$$

являются симметричными с матрицей $M_{m, n}(1)$ и между собой. Зачеркивая все те столбцы у этих матриц, в каждом из которых есть минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq t$, получим теорему. Потому что в каждом из них окажутся незачеркнутыми $\lfloor \log_2 n \rfloor$ столбцов, но необязательно чтобы эти незачеркнутые столбцы соответствовали простым числам. Среди них могут быть числа вида $2^r, n < 2^r < kn$ и числа вида $2^r p_k, n < p_k < kn$. Об этом свидетельствует формула $Lm(j) + \nu(j) = \pi(n)$, где j порядковый номер столбца данной матрицы, $p_k > n$ - простое число.

Тоже самое можно сказать про всех симметричных матриц которые находятся между двумя знаками равенств. Хотя не все незачеркнутые столбцы симметричных матриц соответствуют простым числам, одновременно они дают возможность точно определить проблему криптографии, если принять, что $n = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ или $n = \lfloor \log_2 N \rfloor$, где $N \gg n$.

Пояснение. Доказательства теорем и следствий этой главы подсказывают, что главная задача математических расчетов на числовой оси является выяснение истинной сути числа 0 (ноль) как начало числовой оси (начало расчета). Теория матриц остатков, используя понятие натурального нуля (0_n) , облегчил решение этой задачи. Потому что из $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, где $t = \pi(n)$, следует $Lm(n) + \nu_m(n) = \pi(n)$. Выяснилось, что не только столбец матрицы $M_{m, 0_n}(1)$, но и $M_{m, 0_n}(2), M_{m, 2 \cdot 0_n}(2 \cdot 0_n + 1)$, т.е. числа $1, 0_n + 1, 2 \cdot 0_n + 1$ не кратны простым числам $p_i, 1 < p_i < 0_n$, т.е. они простые числа, или точнее понятие простого числа относительное и зависит от направления расчета на числовой оси.

Таким образом, понятие любого числа на числовой оси стала относительным. Следовательно, математика на числовой оси нам дает относительные результаты и с этим нужно считаться. При доказательстве всех теорем и следствий до этого учитывали это. Думаю и в дальнейшем не забудем об этом, особенно, что матрицу $M_{mkn}(1)$ можно разделить на подобные матрицы с длиной k и шириной $m = \pi(k)$.

Глава 12

Простые числа в определенных промежутках чисел, и оценка их количества с двух сторон

Теорема 12.1

$$\pi(n) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(n+1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим эти матрицы, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этих матриц делим еще на квадрат простого числа p_q , где $2 < p_q < \sqrt{2n}$, и на 2^r , где $\sqrt{n} < 2^r \leq \sqrt{2n}$. Полученные остатки записываем в соответствующем столбце данной матрицы. Общий вид расширенной матрицы обозначим $M_{m_*,n}(\lambda)$, $m_* = m + m^*$, где $m = \pi(n)$, $m_* = \pi(\sqrt{2n})$, $p_q \neq 2$. Разность нулевых остатков имеет вид

$$\overline{M}_{m_*,n}(n+1) - \overline{M}_{m_*,n}(1) = c_*(m_*, n+1, n). \quad (12.1)$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатка.

1) В матрице $M_{m_*,n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_1^* . Имеем

$$k_1^* \leq \pi(n) + [\log_2 n].$$

А количество зачеркнутых столбцов k_1 , где

$$k_1 \geq n - k_1^* = n - \pi(n) - [\log_2 n].$$

2) В матрице $M_{m_*,n}(n+1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^* . Получим

$$k_2^* = \pi(2n) - \pi(n) + 1.$$

А количество зачеркнутых столбцов k_2 равняется

$$k_2 = n - \pi(2n) + \pi(n) - 1.$$

Потому что среди чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$ есть одно число вида 2^r , где $n < 2^r \leq 2n$.

Расставим столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы сначала расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Учитывая соотношение (5.1) и то, что количество столбцов в матрицах равны между собой, получим соотношение

$$\pi(n) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 12.2 *Справедливо неравенство*

$$[\pi(n)] - [\log_3 \sqrt{n}] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq [\pi(n)] + [\log_3 \sqrt{n}] + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(n+1)$ где $m = \pi(n)$. Расширим их так же, как в Теореме 12.1. За исключением того, что теперь $2 \leq p_q \leq \sqrt{2n}$, но $p_q \neq 3$.

Зачеркнем все те столбцы этих расширенных матриц, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатка.

1) В матрице $M_{m*,n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов k_1^* равно

$$k_1^* = \pi(n) + [\log_3 n].$$

А количество зачеркнутых столбцов k_1 равно

$$k_1 \leq n - k_1^* = n - \pi(n) - [\log_3 n],$$

т.к. столбцы, соответствующие числам 1,2,3 не зачеркнуты, а числа 2 и 3 одновременно и простые, и вида $2^r, 3^r$.

2 В матрице $M_{m*,n}(n+1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^*

$$k_2^* \leq \pi(2n) - \pi(n) + 1,$$

потому что возможно существует число 3^r , такое, что $n < 3^r < 2n$. Обозначая количество зачеркнутых столбцов k_2 , получим, что k_2 удовлетворяет неравенству

$$k_2 \geq n - \pi(2n) + \pi(n) - 1.$$

Расставляя столбцы матриц так же, как при доказательстве Теоремы 12.1, получим

$$\pi(n) - [\log_3 \sqrt{n}] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) - [\log_3 \sqrt{n}] + 1.$$

Теорема 12.2 доказана.

Теорема 12.3 *Имеют место соотношения*

$$2 \left(\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - [\log_2 n] \right) - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - [\log_2 n] + 1.$$

и

$$2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left[\frac{3\pi(n)}{4} \right] - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left[\frac{\pi(n)}{4} \right] + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу матрицу $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(\lambda), \lambda = \left[\frac{n^2}{2} \right]$. Расширим эту матрицу, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этой матрицы, делим на квадрат простого числа p_q , где $2 \leq p_q \leq [\sqrt{2n^2}]$. И еще делим на 2^r , где $n < 2^r \leq 2n$. Полученные остатки записываем в соответствующие столбцы матрицы.

Ширина матрицы станет $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n) = m + m^*$, где $m = \pi(\lambda), m^* = \pi(n)$, учитывая и строку, которая соответствует числу 2^r .

Так как расширенную матрицу $M_{m*,n^2}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m*,n^2}(1) = M_{m*,\lambda}(1) + M_{m*,\lambda}(\lambda + 1),$$

где $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n)$. Номера строк $i_* = i + i^*$, $\lambda = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть минимум два нулевых остатка, в строках $1 < i \leq m$, $1 < i^* \leq m^*$.

1) В матрице $M_{m_*,\lambda}(1)$ количество незачеркнутых столбцов $k_1^* = \pi(\lambda) + [\log_2 n]$, а количество зачеркнутых столбцов равно $k_1 = \lambda - \pi(\lambda) - [\log_2 n] = \lambda - k_1^*$.

2) В матрице $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^* , а зачеркнутых - k_2 . Получим соотношения

$$k_2^* \leq k_1^* - 2[\log_2 n] + 1,$$

или

$$k_2^* \geq k_1^* - 3[\log_2 n] - 1.$$

Потому что количество зачеркнутых четных столбцов (соответствуют четным числам) в матрице $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$ больше на величину

$$[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } 2|n \\ 0, \text{ if } 2 \nmid n \end{array} \right\},$$

чем количество зачеркнутых четных столбцов матрицы $M_{m_*,\lambda}(1)$.

Расставляя столбцы матрицы $M_{m_*,\lambda}(1)$ и матрицы $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$ по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одного конца стояли зачеркнутые столбцы, а потом не зачеркнутые, и сопоставляя матрицы в таком расположении столбцов, учитывая соотношения

$$\overline{M}_{m_*,\lambda}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m_*,\lambda}(1) = c_*(m_*, n, \lambda),$$

$$M_{m_*,n^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2)$$

получим

$$2 \left(\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - [\log_2 n] \right) - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - [\log_2 n] + 1.$$

$$2[\log_2 n] - 1 \leq k_1^* - k_2^* \leq 3[\log_2 n] + 1,$$

и

$$2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left\lfloor \frac{3\pi(n)}{4} \right\rfloor - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left\lfloor \frac{\pi(n)}{4} \right\rfloor + 1.$$

Теорема 12.3 доказана.

Следствие 12.1 *Справедливо соотношение*

$$\pi(n(n+1)) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq \pi(n(n-1)) + [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m_*,n^2}(1)$ и $M_{m_*,n^2}(n+1)$, где $m = \pi(n^2)$. Аналогично теореме 12.3 расширим их и зачеркнем их столбцы.

1) В матрице $M_{m_*,n^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n]$$

2) В матрице $M_{m_*,n^2}(n+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* \leq \pi(n^2) - \pi(n) + [\log_2 n].$$

Так как количество тех столбцов, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатка у матрицы $M_{m_*, n^2}(n+1)$ максимум на $\pi(n) - [\log_2 n] + 1$ больше, чем зачеркнутые столбцы матрицы $M_{m_*, n^2}(1)$, получаем формулу

$$\pi(n(n+1)) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq \pi(n(n-1)) + [\log_2 n] + 1.$$

Следствие 12.1 доказано.

Теорема 12.4 Если $m = \pi(n)$, то имеет место соотношение

$$m^2 - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq m^2 + [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m_*, n^2}(1)$, ее можно представить в виде

$$M_{m_*, n^2}(1) = M_{m_*, \lambda}(1) + M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1), \quad (12.2)$$

где $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n)$, $\lambda = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$.

Матрицы из формулы (12.2) расширили и зачеркнули в них столбцы, как в Теореме 12.3. Из столбцов $\pi(\lambda) + [\log_2 \sqrt{\lambda}]$, которые не зачеркнуты в матрице $M_{m_*, \lambda}(1)$ один столбец, который соответствует числу 1, не имеет нулевого остатка (пустой). А каждый из других $\pi(\lambda) + [\log_2 \sqrt{\lambda}] - 1$ столбцов имеет по одному нулевому остатку.

В матрице $M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1)$ в зачеркнутых столбцах добавились максимум $\pi(n) + [\log_2 n] + 1$ нулевых остатков.

Так как при $2|n$ количество зачеркнутых четных столбцов матрицы $M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1)$ больше, чем количество зачеркнутых четных столбцов матрицы $M_{m_*, \lambda}(1)$ на $[\log_2 n] + 1$, а количество незачеркнутых нечетных столбцов меньше максимум на $\pi(n) - [\log_2 n] - 1$, следовательно, учитывая соотношение

$$\overline{M}_{m_*, \lambda}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m_*, \lambda}(1) = c_*(m_*, m, \lambda + 1),$$

получим

$$m^2 - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq m^2 + [\log_2 n] + 1,$$

где $m = \pi(n)$.

Потому что, если n^2 показывает количество столбцов матрицы $M_{m, n^2}(1)$, то m^2 и $[\log_2 n]$ характеризуют разность количеств столбцов матриц $M_{m, \lambda}(\lambda + 1)$ и $M_{m, \lambda}(1)$, которые соответствуют простым числам. Теорема 12.4 доказана.

Следствие 12.2 Имеет место соотношение

$$2\pi(n^2) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) \leq 2\pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m_*, 2n^2}(1)$, расширяя ее и зачеркивая столбцы, как в Теореме 4.3, и рассуждая аналогично с доказательством Теоремы 12.4, получим Следствие 12.2.

Замечание. Принимая число „Ноль“ кратным всем целым числам, автоматически принимается, что число 1 (1 - масштаб числовой оси) не делится на любое число. Это приводит нас к тому, что составное число имеет минимум два простых делителя, т.е. простое число делится только на 1, и число 1 есть “абсолютно простое число”, т.к. не имеет других делителей на данной числовой оси.

Следовательно, на числовой оси число кратно не самому себе, а кратно своему порядковому номеру.

Можно согласиться, что это более логично, чем считать, что число делится на самого себя, потому что имея 30 яблок, 6 детям можем отдать по 5, 5 детям по 6, 10 по 3, 15 по 2, а 30 по 1. Если из 30 детей только одному отдать 30 яблок, а 29 детей оставить без яблок, то это будет не только несправедливым, но и нелогичным. Этот пример показывает, что процесс деления на числовой оси тоже зависит от точки отсчета, и число n отдалено от точки 0 на n отрезков единичной длины, и никто не сможет гарантировать, что любой из этих отрезков можно разделить на n_1 равных частей, где $1 < n_1 < n$. Если заранее не предполагать, что этот единичный отрезок состоит из n_1 равных частей. Теорема Фалеса на числовой оси неточна, и привела существующую математику к “порочному кругу” непрерывности числовой оси и относительности математических операций на числовой оси. Мы можем разделить произвольный отрезок на две равные части с помощью циркуля и линейки. Но тогда возникает проблема, к какой половине отнести центральную точку? Ведь на числовой оси числа представляются отрезками. Именно в этом смысле мы и считаем, что теорема Фалеса неточна.

Существующая математика основано на аксиоме, что 0 кратен всем целым числам, т.е. 0 делится без остатка на все целые числа. Но на числовой оси эта аксиома приводит к ограничениям. Или точнее, к противоречиям, как например, что число „Ноль“ равно сумме или разности всех чисел. Не учитывая их, сталкиваемся с огромным количеством проблем в различных разделах математики. Цель математики не только найти и использовать различные соотношения. Например, не только рассмотреть соотношения $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ и использовать их по отдельности, но и выяснить их взаимосвязь.

Теория матриц остатков использует понятие натурального нуля

$$0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n).$$

Ограничивает отрезок числовой оси длиной kn , где $k \leq n$ - любое натуральное число, и изучает числа, которые образовались на участке kn при помощи всевозможных комбинаций чисел, которых на числовом отрезке $[1, n]$ называем простыми. Поэтому теория матриц остатков не оставляет белых пятен на числовой оси и постепенно раскрывает их.

Глава 13

Степенные матрицы остатков

Определение 13.1 Матрица остатков называется степенной, если количество ее столбцов равно целой степени натурального числа.

Общий вид степенной матрицы обозначим

$$M_{m,n^k}(n), \quad m = \pi(n^{k-1}),$$

где $k > 1$ - натуральное число.

Сначала рассмотрим матрицу $M_{m,n^p}(n)$, $m = \pi(n^{p-1})$, и $2 < p$ - простое число. При любой четности числа n матрица $M_{m,n^p}(n)$ обладает средним столбцом, потому что ее крайние столбцы соответствуют числам одинаковой четности.

Теорема 13.1 Средний столбец матрицы $M_{m,n^p}(n)$, где $m = \pi(n^{p-1})$, содержит нулевые остатки не только в строках, которые соответствуют нечетным простым делителям числа n , но и в строке, соответствующей числу p .

Доказательство. Так как крайние столбцы матрицы $M_{m,n^p}(n)$ в строках, соответствующих простым нечетным делителям числа n , (если они есть), имеют нулевые остатки, следовательно, и средний столбец этой матрицы имеет эти нулевые остатки. Чтобы убедиться в том, что средний столбец этой матрицы имеет нулевой остаток, в строке, соответствующей числу p , к двум сторонам матрицы $M_{m,n^p}(n)$ добавим по n столбцов. Получим матрицу $M_{m,n^p+2n}(0_n)$. Так как $p|0_n$, то $p|\lambda^*$, где число λ^* соответствует среднему столбцу матрицы $M_{m,n^p+2n}(0_n)$. Но λ^* соответствует и среднему столбцу матрицы $M_{m,n^p+2(n-n_1)}(n_1)$, где $1 \leq n_1 \leq p$. Следовательно, $p|\lambda^*$. Теорема 13.1 доказана.

Следствие 13.1 Средний столбец матрицы $M_{m,n^p+kn}(0_n)$, где $2 < p \leq n$ - простое число, в строке, соответствующей числу p , содержит нулевой остаток, если $1 \leq k \leq n$.

Доказательство вытекает из доказательства Теоремы 5.1, потому что средний столбец матрицы $M_{m,n^p+kp}(0_n)$, где $m = \pi(n^{p-1})$, по отношению к среднему столбцу матрицы $M_{m,n^p+p(k-1)}(0_n)$ перемещен на числовой оси на расстояние p , которое определяется столбцами.

Следствие 13.2 Средний столбец матрицы $M_{m,n^p}(1)$, где $2 \nmid n$, $2 < p$ - простое число, $m = \pi(n^{p-1})$, содержит нулевые остатки в строке p и в строке p_i , где $p_i|n$, $p_i > 2$.

Доказательство. Допустим, что λ^* есть средний столбец матрицы $M_{m,n^p}(1)$, где $m = \pi(n^{p-1})$, $2 < p$ - простое число $2 \nmid n$. Отметим, что при $2 \nmid n$ количество четных чисел между числами $1, 2, \dots, \lambda^*$ на единицу меньше, чем количество четных чисел между числами $\lambda^* + 1, \lambda^* + 2, \dots, 2\lambda^*$. К обеим сторонам матрицы $M_{m,n^p}(1)$ прибавим по одному столбцу, которые соответствуют числам 0_n и $n^p + 1$, где $2 \nmid n$, в результате получим матрицу $M_{m,n^p+2}(0_n)$. Так как $p \nmid 0_n$. Следовательно, $p \nmid n^p + 1$, потому что $n^p + 1 = 2\lambda^*$ и λ^* есть средний столбец матрицы $M_{m,n^p-2p}(1)$. Кроме того, λ^* есть и средний столбец матрицы $M_{m,n^p+2n}(2p+1)$. Поэтому $p_i \mid \lambda^*$, если $p_i \mid n$, где $p_i > 2$ - простые нечетные делители числа n , если они есть.

Следствие 13.3 *Средний столбец матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, $m = \pi(n)$, отдален от ее крайних столбцов на равные расстояния, и сумма нулевых и ненулевых остатков в нем равна $\pi(n)$.*

Доказательство. Так как крайние столбцы матрицы $M_{m,2n-1}(1)$ соответствуют нечетным числам, следовательно она обладает средним столбцом, который соответствует числу n . Средний столбец матрицы $M_{m,2n-1}(1)$ обозначим n_s . Тогда количество всех остатков столбца n_s есть

$$\nu_m^*(n) + L_m^*(n) = \pi(n),$$

где $\nu_m^*(n)$ - количество различных простых делителей числа n , каждый из которых меньше или равен n , а $L_m^*(n)$ - количество ненулевых остатков среднего столбца n_s , каждый из которых меньше n .

Так как n_s является не только средним столбцом матрицы $M_{m,2n-1}(1)$, но и средним столбцом матрицы $M_{m,2n+2}(0_n)$, потому что она составлена из чисел $0_n, 0_n + 1, \dots, 0_n + 2n$. Следовательно, дальность (определяется количеством столбцов) среднего столбца n от 0_n и от $2n$ равны между собой. и равны n отрезков единичной длины.

Теорема 13.2 *Если средний столбец матрицы $M_{m,n^p}(n)$, где $m = \pi(p)$, p - простое число, в строке p содержит нулевой остаток, то крайние столбцы матрицы $M_{m,2kp+1}(kp)$ тоже имеют нулевые остатки в строке p , здесь k - натуральное число. И обратно, если крайние столбцы матрицы имеют общие нулевые остатки, то эти остатки имеет и средний столбец.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,2kp+1}(kp)$, где $m = \pi(p)$, и $k > p$ - натуральное число. Она составлена из чисел

$$(k-1)p, (k-1)p+1, \dots, kp, kp+1, \dots, (k+1)p.$$

Ясно, что средний столбец этой матрицы, который соответствует числу kp , и крайние столбцы, которые соответствуют числам $(k-1)p$ и $(k+1)p$ имеют нулевые остатке в строке p . Нетрудно заметить, что и матрица, составленная из чисел

$$(k-k_1)p, (k-k_1)p+1, \dots, kp, kp+1, \dots, (k+k_1)p,$$

в среднем и крайних столбцах имеет нулевые остатки в строке p , где $k \geq p$, а $k_1 \leq p$ - произвольное простое число.

Рассматривая матрицу, составленную из чисел

$$0_n, 0_n+1, \dots, p^2, \dots, 2p^2,$$

где $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, и расширяя ее, т.е. увеличивая ширину m этой матрицы так, чтобы она стала m_* , где $m_* = \pi(2p^p)$, получим матрицу $M_{m_*, 0_n+2}(2)$. Заметим, если $0_n = \prod_{i=1}^{m_*} p_i$, где $m_* = \pi(2p^p)$, то средний столбец этой матрицы, которая состоит из чисел

$$0_n, 0_n + 1, \dots, p^p, \dots, 2p^p,$$

имеет нулевой остаток в строке p . Крайние столбцы этой матрицы тоже имеют нулевые остатки в строке p . Потому что $p|0_n$, $p|2p^p$. Так как $p|p^p$, следовательно, $p|n^p - n$, $p|2n$, $p|p$, $p|np + p$ и обратно. Теорема 13.2 доказана.

Следствие 13.4 Если $x - y$ кратно p и $p > 2$, то $x^p - y^p$ кратно p^2 .

Доказательство тривиально, т.к. если $x - y$ кратно p , где $p > 2$ - простое, а x, y - натуральные числа, тогда это означает, что $x \gg y$, $x \gg p$. Поэтому $x = kp + y$, где k - тоже натуральное число. Таким образом, получаем что $(kp + y)^p - y^p$ кратно p^2 .

Замечание. Из этого Следствия вытекает малая теорема Ферма, потому что сводится к $x^p - x$ кратно xp , где xp означает, что на числовой оси на отрезке $[1, x^p]$ имеется p чисел, которые делятся только на x . Это числа $x, x^2, \dots, x^p$. Также на этом отрезке имеется $p - 1$ чисел, которые кратны только px . Это числа $xp, (xp)^2, \dots, (xp)^{p-1}$.

Из Теоремы 13.2 можно получить теорему Вилсона: $(p - 1)! + 1$ кратно p и $0! = 1$.

Таким образом, ограничивая числовой отрезок $[0_n, 2n]$, сводим его к отрезку $[-n, +n]$. Числа, которые мы называем натуральными, становятся остатками при делении больших чисел на малые. Например $2p : 2 = p$, учитывая, что p одновременно есть остаток от деления $p^2 : p$, $p^p : p$. Потому что среди чисел $1, 2, \dots, p^p$ имеется p чисел, каждое из которых кратно только p , т.е. они имеют вид p^k .

Это числа $p, p^2, \dots, p^p$.

Малая теорема Ферма и теорема Вилсона показывают, что метод математической индукции и метод решета - главные методы изучения числовых соотношений на числовой оси. И в Матричной математике эти методы объединяются.

Глава 14

Фокусы и фокусные расстояния в матрицах остатков

14.1 Введение

В матрицах остатков каждый столбец характеризуется не только нулевыми остатками, но и ненулевыми. В Следствии 13.3 была получена формула

$$L_m^*(j) + \nu_m^*(j) = \pi(n), \quad L_m^*(1) = \pi(n) = m.$$

Здесь j - порядковый номер столбца.

Возникает вопрос, по отношению какого столбца определяется номер столбца j ? Ведь матрица остатков имеет два крайних столбца, поэтому роль смежных матриц становится решающей.

Рассмотрим смежные матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\lambda + 1)$, где $\pi(n) = m$. Так как эти матрицы отличаются только столбцами, которые соответствуют числам λ и $\lambda + n$, а остальные столбцы у них общие, следовательно они, объединяясь, образуют новую матрицу, которая составлена из чисел $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n$. Ясно, что при $2|n$ новая матрица обладает средним столбцом, который можно обозначить λ^* . Число, соответствующее λ^* , назовем фокусом, а числа λ и $\lambda + n$ назовем побочными фокусами новой матрицы.

Каждое из чисел λ, λ^* и $\lambda + n$ характеризуется нулевыми и ненулевыми остатками, которые по абсолютной величине меньше или равны n . Поэтому становится интересным определение не только их количество, но и их расстояние от среднего столбца и от начала числовой оси.

14.2 Фокусные расстояния в матрицах остатков

Общий вид матриц, обладающих средним столбцом, обозначим $M_{m,2n-1}(1)$, где $m = \pi(n)$. Средний столбец этой матрицы соответствует числу n , а крайние столбцы числам 1 и $2n - 1$. Следовательно, число n является фокусом, а 1 и $2n - 1$ - побочными фокусами этой матрицы.

Если фокусы матрицы показывают количество столбцов (целочисленных точек на числовом отрезке), то фокусные расстояния показывают количество отрезков единичной длины (масштабы числовой оси), которые плотно расставлены между этими столбцами (точками). Поэтому фокусные расстояния всегда на 1 меньше, чем количество точек на данном числовом отрезке, с помощью которых составлена данная матрица.

Если рассматриваются матрицы $M_{m,2n-1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, $2|\lambda$, то приходится определить фокусные расстояния не только по отношению к фокусам, но и по отношению к началу отсчета.

Теорема 14.1 *Любая квадратная матрица, которая обладает средним столбцом, обладает фокусами и фокусными расстояниями.*

Доказательство. Рассмотрим квадратную матрицу $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$. Она обладает средним столбцом, который соответствует простому числу (Теорема 11.2), этот столбец назовем главным фокусом этой матрицы.

Так как

$$M_{m,p^2}(1) = M_{m,2p-1}(1) + M_{m,2p-1}(2p) + M_{m,2p-1}(4p) + \dots + M_{m,2p-1}(\lambda),$$

где $\lambda = p(p-2)$.

Тогда число p^2 является фокусом, а числа $p(p-1)$ и $p(p+1)$ являются побочными фокусами матрицы $M_{m,2n-1}(\lambda)$. С другой стороны, если рассмотреть матрицу, составленную из чисел

$$k, k+1, \dots, \lambda^*, \lambda^*+1, \dots, 2\lambda^*-k, \quad (14.1)$$

то матрицы, которые фигурируют в формуле (14.1) по отношению к среднему столбцу тоже имеют фокусы и фокусные расстояния. И если средний столбец называем главным фокусом, то p и p^2 являются фокусами сдвинутых матриц $M_{m,2p}(1)$ и $M_{m,2p}((p-1)^2+1)$, которые по отношению к среднему столбцу передвинуты на равные расстояния.

Следствие 14.1 *Если $\nu(n) = 1$, то число n является средним столбцом некоторой квадратной матрицы.*

Доказательство. По условию Следствия имеем, или $n = p_k$ - простое число, или $n = 2^k$.

- 1) При $n = p_k$ - простое число p_k соответствует среднему столбцу матрицы $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$, потому что средний столбец матрицы $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$, $p > 2$ соответствует простому числу p_k . Это следует из Теоремы 11.2.
- 2) При $n = 2^k$, т.к. $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, следовательно, 2^k соответствуют среднему столбцу матрицы $M_{m,0_n+2}(0_n)$.

Глава 15

Проблемы простых чисел – близнецов

Если разность двух простых чисел равна $|2|$, то их называют простыми близнецами. Например 3 и 5 или 7 и 5. Со времен Архимеда существует предположение, что количество простых близнецов бесчисленно, но оно пока не доказано. Существование взаимно простых чисел $-1, +1$ подсказывает, что проблема простых близнецов есть следствие основной аксиомы числовой оси, которая гласит, что число 0 (ноль) кратно всем целым числам. Остается доказать это следствие. Собственно говоря, надо доказать более общее следствие.

$$p_{m+1} - p_m = 2^r a,$$

где a и r - натуральное число, $2 \nmid a$.

Ясно, что при $r = a = 1$ получаем проблему простых чисел близнецов.

Теорема 15.1 Если функции $f^*(2n)$ и $f^*(2n^2)$ показывают количество простых близнецов $< 2n$ и $< 2n^2$, то справедливо неравенство

$$f^*(2n^2) - f^*(2n) \geq f^*(2n).$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу остатков $M_{m, 2n^2}(1)$, где $m = \pi(2n)$. Расширим ее, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этой матрицы, разделим еще на квадрат простого числа P_q^2 , где $2 < P_q < [\sqrt{2n^2}]$. Полученные остатки запишем в соответствующие столбцы данной матрицы.

Зачеркнем все те столбцы этой матрицы, каждый из которых содержит как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i_* \leq i + i^*$, где

$$1 \leq i = m = \pi(2n), i^* = m^* = \pi(P_q), 2 < P_q \leq [\sqrt{2n^2}], m_* = m + m^*$$

.

Обращая внимание на столбцы матрицы $M_{m_*, n^2}(1)$, которые соответствуют числам $1, 2, 3, \dots, n^2$ заметим, что среди них количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n^2].$$

Потому что столбец, который соответствует числу 1, тоже не зачеркнут.

Рассмотрим столбцы матрицы $M_{m, n^2}(n^2 + 1)$, которые соответствуют числам $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, 2n^2$. Среди них незачеркнутыми являются столбцы, которые соответствуют числам P_k , где $n^2 < P_k < 2n^2$, и числу 2^r , где $n^2 < 2^r \leq 2n^2$.

Если их количество обозначить k_2^* , то

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + \pi(n) + 1.$$

Поэтому

$$[\log_2 2n^2] - [\log_2 n] \geq [\log_2 n] + 1.$$

Так как матрицу $M_{m_*, 2n^2-1}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*, 2n^2-1}(1) = M_{m_*, 2n}(1) + M_{m_*, 2n}(2n+1) + M_{m_*, 2n}(4n+1) + \dots + M_{m_*, 2n}(2n^2-2n-1).$$

Следовательно любая из матриц $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, где $n > 10$, $\lambda \geq 2n$, $(\lambda, n) = \nu(n)$, с зачеркнутыми и незачеркнутыми столбцами, сопоставляя с матрицей $M_{m, 2n}(1)$ заметим, что они суммарно имеют не менее чем $[\log_2 n]$ незачеркнутых парных столбцов, которые составляют простые числа близнецы. Это объясняется тем, что матрица $M_{m_*, 2n^2-1}(1)$ обладает средним столбцом соответствующий числу $\lambda^* = n^2$, и незачеркнутые столбцы (в том числе и те, которые составляют простые близнецы) при любой четности n по отношению столбца (числа) n^2 расположены симметрично. Поэтому

$$f^*(2n^2) - f^*(2n) \geq f^*(2n),$$

т.е. простые числа близнецы бесчисленны.

Теорема 15.2 Если $2^p - 1$, где p - простое число, не кратно 5, то оно простое число.

Доказательство. Если p - простое число, то число $2^p + 1$ кратно 3. Поэтому и число $2^p - 2$ кратно 3. Из этого следует, что возможно одно из чисел $2^p - 2, 2^p + 1$ кратно 5. Но шагая с точки (числа) $0_n = \prod_{i=1}^m$, $m = \pi(n)$ с длиной шага 2, т.е. шаг равен двум отрезкам единичной длины, если через некоторое количество шагов наступим на точку (число) $2^p - 2$ и выяснится, что $2^p - 2$ не кратно 5, это значит, что числа $2^p - 4$ и $2^p + 1 = 2^p - 2 + 3$ кратно 5, и число $2^p - 1$ простое. Потому что и четные и нечетные числа можно привести к одинаковой размерности. Разность ближайших четных и нечетных чисел равно 2. То есть и четные и нечетные числа можно свести к сумме определенного количества двоек (начиная от столбца 0_n , или от столбца 1).

Из Теоремы 6.3 мы знаем, что если p - простое число Мерсена (M_p), то $2^p - 1 = q$ тоже простое число. Это подтверждает Теорему 15.2.

Замечание. Теорема 15.2 доказывает, что процесс умножения (деления) на числовой оси не всегда есть короткое сложение (вычитание), как это принято считать. Потому что результаты этих операций относительные, т.е. определяются по отношению к различным точкам, но в одном направлении.

Теорема 15.3 Между двумя последовательными простыми числами Ферма (F_p) имеется минимум одно простое число Мерсена.

Доказательство. Теоремы 6.3 и 6.4 утверждают, что

$$F_{p_1} = 2^2 + 1 = 5, F_{p_2} = (2^2)^2 + 1 = 17, F_{p_3} = ((2^2)^2)^2 + 1 = 257, \dots$$

$$M_{p_1} = 2^2 - 1 = 3, M_{p_2} = 2^3 - 1 = 7, M_{p_1} = 2^7 - 1 = 127, \dots$$

Следовательно, учитывая, что самое малое число Мерсена - это 3, а самое малое простое число Ферма - это 5 (1 не считаем простым числом), получим

$$F_{p_m} < M_{p_{m+1}} < F_{p_{m+1}}.$$

Так как простые числа Мерсена (M_p) можно получить и по серии $M_p = 2^5 - 1 = 31$, и они тоже находятся на положительном участке числовой оси. Следовательно,

возможно, что между двумя последовательными простыми числами Ферма попало более одного простого числа Мерсена, как например для чисел

$$17 < 31 < 127 < 257.$$

Такой набор простых чисел Ферма (F_p) и Мерсена (M_p) не исключено, потому что они тоже зависят от направления их расчета и Теорема доказана.

Следствие 15.1 Если $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(2^n)$ и $\nu(2^n) = 1$, то числа $0_n + 1$ и $0_n - 1$ - простые числа близнецы.

Доказательство. Из Теоремы 15.3 знаем, что $0_n + 1$ - простое число Ферма, если число $2^{2^n} + 1$ простое. По теореме 15.2 число $2^p - 1$ простое число Мерсена, если p - простое число Мерсена. Следовательно, все зависит от $\nu(n)$, т.е. имеем

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2, 13 = 12 + 1 = 11 + 2, 19 = 18 + 1 = 17 + 2, \dots$$

Такую же картину увидим на числовых отрезках $[1, 2, 3, \dots, 2^n + 1]$ и $[2^{2^n} - 2^n - 1, 2^{2^n} - 2^n, 2^{2^n} - 2^n + 1, \dots, 2^{2^n} + 1]$, если $\nu(2^n) = 1$ и $2^n + 1 = F_{p_{m-1}}$, $2^{4^n} + 1 = F_{p_{m+1}}$ - простые числа Ферма F_p .

Теорема 15.4 Если $\pi_1(x)$ показывает количество простых чисел вида $4x - 1$, а $\pi_2(x)$ показывает количество простых чисел вида $4x + 1$, то имеет место

$$\pi_1(2p^2) - \pi_2(2p^2) = [\log_2 p].$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*, 2p^2}(1)$, где $m_* = m + m^*$, $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(2p)$ которую представим в виде

$$M_{m_*, 2p^2}(1) = N_{m_*, p^2}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, p^2}(2|2).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц в каждом из которых есть минимум 2 нулевого остатка в строках $1 < i \leq m$, $1 < i^* \leq \pi(2p)$.

1. В матрице $N_{m_*, p^2}(2 \uparrow 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi(2p^2),$$

а зачеркнутых $k_1 = p^2 - k_1^*$ (столбец соответствующий числу 1 тоже незачеркнут).

2. В матрице $N_{m_*, p^2}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k^* = 2\pi(p^2) + 2[\log_2 p],$$

а зачеркнутых $k_2 = p^2 - k_2^*$.

Расставляя матрицы $N_{m_*, p^2}(2 \uparrow 1)$ и $N_{m_*, p^2}(2|2)$ с зачеркнутыми столбцами так, чтобы с одной стороны располагались незачеркнутые столбцы а потом зачеркнутые и сопоставляя матрицы в таком расположении столбцов получим теорему так как матрицы имеют одинаковое количество столбцов. Следовательно, количество зачеркнутых столбцов, которые кратны 5, на $[\log_2 p]$ больше чем те столбцы, которые кратны 3. Поэтому разность простых чисел вида $4x - 1$ становится на $[\log_2 p]$ больше чем количество простых чисел вида $4x + 1$, т.е.

$$\pi(2p^2) - \pi(p^2) = \pi(p^2) + [\log_2 p].$$

и теорема не вызывает сомнения.

Следствие 15.2 *Имеет место соотношение*

$$f^*(2p^2) - f^*(2p) \geq f^*(2p).$$

Доказательство. По теории матриц остатков имеем

$$L_m(2p^2) - \nu(2p^2) = \pi(p^2),$$

следовательно

$$L_m(2p^2) \pm 1 = \nu(O_n \pm 1)$$

которое доказывает следствие 15.2, потому что количество простых чисел (столбцов) зависит от направления расчета. Если их рассчитываем начиная от числа 0_n в правую сторону, то числа $\pi(p)$ считаются простыми, а числа $[\log_2 p]$ составными, а если их рассчитываем начиная от числа $2p^2$ в левую сторону, то числа $\pi(p)$ становятся остатками от деления каких-то простых чисел на простые числа p_i , где $2 \leq p_i \leq p$, а числа $[\log_2 p]$ становятся новыми простыми числами. Это объясняется формулами

$$L_m(0_n) + \nu(p) = \pi(p), \quad L_m(1) + \nu(p) = \pi(p), \quad 0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n).$$

Следствие 15.3 *Имеет место соотношение*

$$\pi_1(p^p) + \pi_2(p^p) = [\log_2 p]^p.$$

Доказательство следствия тривиально вытекает из теоремы 15.4.

Следствие 15.4 *При $1 < k \leq p$ имеет место $\pi(kp) = (k-1)\pi^*(p) + [\log_2 p]$, $\pi(kp) = k\pi^*(p) - 1$, где $\pi^*(n)$ – количество нечетных простых чисел $\leq n$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m_*,kp}(1)$, где $m_* = m + m^*$, $m = \pi(p)$, $m^* = \pi(\sqrt{kp})$, и представим ее в виде

$$M_{m_*,kp}(1) = M_{m_*,p}(1) + M_{m_*,p}(p) + M_{m_*,p}(2p) + \cdots + M_{m_*,p}((k-1)p). \quad (a)$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц в каждом из которых есть минимум 2 нулевого остатка в строках $1 < i \leq m$, $1 < i^* < \pi(k) = m^*$.

В матрице $M_{m_*,p}(1)$, которая находится на правой части суммы (a), есть $\pi(p) + 1$ незачеркнутых столбцов, из которых только один пустой (не имеет нулевых остатков), а в других – только по одному нулевого остатка.

В остальных матрицах этой суммы незачеркнутые столбцы пустуют (не имеют нулевых остатков), т.е. соответствуют простым числам p_k , где $p < p_k < kp$. Так как количество этих матриц равно $k-1$, и каждый из них подобен матрице $M_{m_*,p}(1)$, следовательно каждый из них сопоставляя с матрицей $M_{m,p}(1)$, по максимальному количеству нулевых остатков, получим следствие 15.4, т.е. суммарное количество простых столбцов в матрице $M_{m_*,kp}(1)$ выражается формулами

$$\pi(kp) = (k-1)\pi^*(p) + [\log_2 p] \quad \text{или} \quad \pi(kp) = k\pi^*(p) - 1.$$

Примечание. Следствие 15.4 нетрудно доказать и для матриц $M_{m_*,n}(1)$, $M_{m_*,2n}(1)$, где $2 \nmid n$.

Глава 16

Деление чисел на числовой оси

В нашем сознании процесс деления производится как группирование имеющихся объектов, независимо от какого объекта и в каком порядке их выбирают для группирования. Выясняется, что числа на числовой оси тоже можно группировать.

В Матричной математике числа группируются в виде матриц остатков. Как например, если заданы $2n$ последовательных натуральных чисел, то их рассматривают в матрицах $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n)$, $\lambda_2 = \lambda_1 + n + 1$, или $N_{m,n}(2|\lambda)$ и $N_{m,n}(2 \nmid \lambda + 1)$, $m = \pi(n)$. В том, или в другом случаях возникают вопросы, связанные со свойствами чисел в каждой матрице в зависимости от величины λ, n и $\pi(n)$. Чтобы ответить на некоторые из этих вопросов рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$, где $m = \pi(n^2)$.

Теорема 16.1 *Справедливо соотношение*

$$\pi(n^2) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) - \pi(n^2) \leq \pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$, где $m = \pi(n^2)$. Расширим эти матрицы, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этой матрицы разделим еще на число p_q^2 , где $2 < p_q \leq [\sqrt{2n^2}]$ - простое число. Полученные остатки запишем в соответствующем столбце каждой матрицы.

При расширении матриц их ширина увеличится и станет $m_* = m + m^*$, где $m = \pi(n^2)$, $m^* = \pi([\sqrt{2n^2}]) - 1$, $p_q \neq 2$.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть минимум два нулевых остатков в строках $1 < i_* \leq m + m^*$.

Обращая внимание на матрицы с зачеркнутыми столбцами, заметим, что

1) В матрице $M_{m,n^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n^2].$$

Здесь учтено, что столбец, соответствующий числу 1, тоже незачеркнут.

2) В матрице $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Так как среди чисел $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, 2n^2$ есть одно число вида 2^r .

Расставляя столбцы матриц по максимальной выборке нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились зачеркнутые столбцы, а затем незачеркнутые, и учитывая, что количество столбцов в матрицах равны, сопоставляя матрицы в таком расположении столбцов, получим соотношение

$$\pi(n^2) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) - \pi(n^2) \leq \pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Теорема доказана.

Теорема 16.2 Если $a + b$, где $a > 0, b > 0, 2 < p$ - простое число, кратное p , то $a^p + b^p$ кратно p^2 .

Доказательство. Так как при $a = b$ теорема верна, следовательно, при $a \neq b$ из за симметричности $a + b$ мы можем принять $a \gg b, a \gg p$. Но тогда $a = \alpha p - b$, где α тоже целое число. То есть при делении a на p в остатке получается $|b|$. В противном случае мы не можем принять, что число 0 (ноль) кратно a, p и b . Следовательно,

$$(p\alpha - b)^p + b^p = (p\alpha)^p - p(p\alpha)^{p-1}b + \dots + p(p\alpha) \cdot b^{p-1} - b^p + b^p.$$

Теорема доказана.

Примечание. Доказательство Теоремы 8.2 тривиально получается из свойств матриц остатков.

Теорема 16.3 Средний столбец матрицы $M_{m,\lambda^p}(1)$, где $m = \pi(\lambda^{p-1})$, $2 \nmid \lambda$, содержит нулевой остаток в строке, соответствующей простому числу $p > 2$.

Доказательство. Поначалу отметим, что строка, соответствующая числу p , это та строка, где помещены все остатки, возникающие при делении чисел $1, 2, \dots, \lambda^p$ на число p . Так как $\lambda^p - \lambda = \lambda(\lambda^{p-1} - 1)$ кратно p и λ . Следовательно, если средний столбец матрицы $M_{m,\lambda^p}(1)$ обозначить λ^* , то λ^* будет и средним столбцом матрицы $M_{m,0_n+2}(0_n)$. Так как $p|0_n$, то $p|2\lambda^*$, отсюда следует, что $p|\lambda^*$, если $p > 2$. Теорема 16.3 доказана.

Следствие 16.1 Уравнение $x^p + y^p = z^p$ при $(x, y) = 1, (x, z) = 1, (y, z) = 1$ при $p > 2$ не имеет решений в целых числах.

Доказательство. Допустим, что заданы матрицы $M_{m,x^p}(1), M_{m,y^p}(1)$, где $2 \nmid x, 2 \nmid y, (x, y) = 1$. Если x^*, y^* соответствуют средним столбцам этих матриц, то по Теореме 16.3 имеем $2p|2x^*, 2p|2y^*$, потому, что x^* соответствует также и среднему столбцу матрицы $M_{m,(2x)^2}(2x+1)$. Здесь $0_n = 0_x = \prod_{i=1}^m p_i$. Так как уравнение $x^p + y^p = z^p$ симметрично по отношению к неизвестным x, y , то мы также можем получить, что $2|2z^*$, где z^* есть средний столбец матрицы $M_{m,z^p+2}(2)$. Ясно, что при $p > 2$ получим $(x, y, z) = p$, и уравнение $x^p + y^p = z^p$ при $(x, y) = 1, (x, z) = 1, (y, z) = 1$ может иметь решение в целых числах только тогда, когда $p = 2$.

Глава 17

Функция $\pi(n)$ и проблема криптографии

Как известно, функция $\pi(n)$ показывает количество простых чисел, не превосходящих числа n , а $\nu(n)$ - есть количество различных простых делителей числа n . Со времен Архимеда ищут способы более легким путем определить $\pi(n)$ и $\nu(n)$. Но эти методы становятся беспомощными, когда $n \rightarrow \infty$. В современном развитии теоретической и прикладной математики функции $\pi(n)$ и $\nu(n)$ имеют решающее значение. Поэтому любая область науки не обходится без электронно-вычислительных машин (ЭВМ). В данной статье моя цель не привести факты, подтверждающие сказанное, а с помощью матриц остатков облегчить процесс определения величин $\pi(n)$ и $\nu(n)$, что является важной проблемой криптографии.

Теорема 17.1 *Имеет место соотношение*

$$(\pi(p))^2 - [\log_2 p] - 1 \leq \pi(p^2) \leq (\pi(p))^2 + [\log_2 p] + 1. \quad (17.1)$$

Доказательство. Рассмотрим квадратную матрицу $M_{m,p^2}(1)$, $m = \pi(p)$, она обладает средним столбцом, который обозначили λ^* , ранее мы доказали, что λ^* соответствует простому числу. Расширяя эту матрицу, мы получили соотношение

$$\pi((p+1)^2) - [\log_2 p] - 1 \leq \pi(p^2) \leq \pi((p-1)^2) + [\log_2 p] + 1. \quad (17.2)$$

Это следствие Теоремы 12.3.

Возникает вопрос, как можно усилить формулу (17.2)? Ведь матрицу $M_{m_*,p^2}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*,p^2}(1) = M_{m_*,2p}(1) + M_{m_*,2p}(2p+1) + \dots + M_{m_*,2p}((p-1)^2+1), \quad (17.3)$$

а также в виде

$$M_{m_*,p^2}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(\lambda+1), \quad (17.4)$$

и в виде

$$M_{m_*,p^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2) \quad (17.5)$$

Здесь $\lambda = \left\lfloor \frac{p^2}{2} \right\rfloor$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi(\lambda)$, $m^* = \pi(\sqrt{2\lambda})$, $p_q \neq 2$. А также еще в виде

$$M_{m_*,p^2}(1) = M_{m_*,p}(1) + M_{m_*,p}(p+1) + \dots + M_{m_*,p}((p-1)^2-1). \quad (17.6)$$

Равенство (17.6) символично можно представить в виде

$$M_{m,p^2}(1) = (M_{m,p-1}(1))^2 \quad (17.7)$$

Величина p^2 показывает количество всех натуральных чисел на числовом отрезке $[1, p^2]$.

Рассмотрим матрицы $M_{m,\lambda}(1)$ и $M_{m,\lambda}(\lambda + 1)$, где $\lambda = \left\lfloor \frac{p^2}{2} \right\rfloor$, $m = \pi(\lambda)$. Расширим их, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу данной матрицы, разделим на $2 < p_q \leq \lfloor \sqrt{2p^2} \rfloor$ и на $p < 2^r < 2p$. Полученные остатки запишем в данных столбцах каждой матрицы.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых в строках $1 < i_* \leq i + i_*$ содержит как минимум два нулевых остатка.

1) В матрице $M_{m*,\lambda}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi(\lambda) + \lfloor \log_2 p \rfloor.$$

2) В матрице $M_{m*,\lambda}(\lambda + 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi(2\lambda) - \pi(\lambda) + 1.$$

Потому, что среди чисел $\lambda + 1, \lambda + 2, \dots, 2\lambda$ есть одно число вида 2^r .

Расставим столбцы расширенных матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились зачеркнутые столбцы, а потом незачеркнутые. Так как количество столбцов матриц совпадает, сопоставляя их в таком расположении столбцов, получим соотношение (17.1).

Следствие 17.1 *Имеет место соотношение*

$$\pi((n + 1)^2) - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1 \leq \pi(n^2) \leq (\pi(n - 1)^2) + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1. \quad (17.8)$$

Доказательство. Следствие 17.1 нетрудно получить из доказательства Теоремы 17.1, если учесть, что формулы (17.1) и (17.2), можно усилить, учитывая $\nu(n + 1), \nu(n)$ и $\nu(n - 1)$.

Следствие 17.2 *Имеет место соотношение*

$$2\lfloor \log_2 n \rfloor - 1 \leq \pi((n + 1)^2) - \pi((n - 1)^2) \leq 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 1. \quad (17.9)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $N_{m,n^2}(2|1)$ и матрицу $N_{m,n^2}(2|2)$, где $m = \pi((n - 1)^2)$. Зачеркнем все те столбцы у этих матриц, каждый из которых содержит как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi((n - 1)^2)$.

1) В матрице $N_{m,n^2}(2|1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi((n + 1)^2) - \pi((n - 1)^2) + 1.$$

Столбец, соответствующий числу 1, тоже незачеркнут.

2) В матрице $N_{m,n^2}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = 2\lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (17.9). Следствие 17.2 доказано.

Замечание. По этому следствию можно определить точное количество простых чисел в любом промежутке чисел на числовой оси.

Следствие 17.3 *Имеет место соотношение*

$$\pi(N) = (\pi(n))^2, \quad n = [\log_4 N]. \quad (17.10)$$

Доказательство. Так как $2^{2N} = 2^N 2^N$, $[\log_4 N] = [\log_2 2N]$. Допустим, что $[\log_4 N] = n$, тогда можно не только оценить $\pi(N)$ но и $\pi(N^2)$, поскольку

$$\pi(N) = (\pi(n))^2 + [\log_2 n], \quad n = [\log_4 N].$$

Теорема 17.2 *Имеет место соотношение*

$$\nu(N) = \nu(\nu(n_1) + \nu(n_2) + \nu(n_3) + \nu(n_4) + \nu(n_5)),$$

где

$$n_1 = [\log_2 N]; \quad n_2 = [\log_3 N]; \quad n_3 = [\log_4 N]; \quad n_4 = [\log_5 N]; \quad n_5 = [\log_7 N].$$

Доказательство. Так как средний столбец матриц $M_{m,2^{2N}+2}(0_n)$ и $M_{m,2^{2N}+1}(1)$, где $m = \pi(2^N)$, $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, совпадают, следовательно число $2^{2N} + 2$ может содержать нулевые остатки в столбцах, которые соответствуют числам $n_1 = [\log_2 N]$; $n_2 = [\log_3 N]$; $n_3 = [\log_4 N]$; $n_4 = [\log_5 N]$ и $n_5 = [\log_7 N]$. Но в этих столбцах могут быть повторяющиеся простые делители, а нас интересуют только различные простые делители числа N . Поэтому получает утверждение Теоремы 17.2.

Примечание. Ясно, что с помощью теоремы 17.2 можно определить и все делители числа N .

Следствие 17.4 *Если число N – простое, то n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 соответствуют простообразованным числам, т.е. числам вида P_i^k , $k \geq 1$, P_i – простое число.*

Доказательство следствия тривиально вытекает из теоремы.

Теорема 17.3 *Имеет место соотношение*

$$[\log_2 n] - 1 \leq \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \leq [\log_2 n] + 1. \quad (17.11)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(2n+1)$, где $m = \pi(n^2)$. Расширим их, т.е. разделим каждое число, которое соответствует каждому столбцу этих матриц, на число p_q^2 , где p_q – простое число, такое, что $2 < p_q \leq [\sqrt{2n^2}]$. Полученные остатки занесем в соответствующие столбцы данной матрицы.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых содержит минимум два нулевых остатков в строках $1 < i \leq \pi(n^2)$.

1) Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n^2}(1)$ есть

$$k_1^* = 2[\log_2 n] + \pi(n^2),$$

т.к. столбец, соответствующий числу 1, тоже не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,n^2}(2n+1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_2^* \leq \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Так как возможно среди чисел $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, (n+1)^2$ имеется одно число вида 2^r .

Учитывая, что матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(2n+1)$ имеют общие столбцы, которые соответствуют числам $2n+1, 2n+2, \dots, n^2$. Мы можем их не учитывать и сравнивать матрицы $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(n^2+1)$ с уже зачеркнутыми столбцами.

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились зачеркнутые столбцы, а потом незачеркнутые, и учитывая, что

$$\overline{M}_{m,n^2}(2n+1) - \overline{M}_{m,n^2}(1) = \overline{M}_{m,2n}(n^2+1) - \overline{M}_{m,2n}(1) = c(m, n, 2n+1).$$

Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношением (17.11). В противном случае получим, что матрицы не имеют равного количества столбцов.

Теорема 17.4 *Имеет место соотношение*

$$2\pi(n^2) - \pi(n) \leq \pi(2n^2) \leq 2\pi(n^2) - \left\lfloor \frac{\pi(n)}{2} \right\rfloor + 1. \quad (17.12)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n^2+1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим их как в Теореме 17.3. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых соответствует составному числу.

1) Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n^2}(1)$ есть

$$k_1^* = \pi(n^2) + 1,$$

т.к. столбец, соответствующий числу 1, тоже не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,n^2}(n^2+1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2).$$

Так как в каждой строке каждой матрицы есть n^2 нулевых и ненулевых остатков, а в каждом столбце этих же матриц есть $\pi(n)$ нулевых и ненулевых остатков, следовательно, в матрице $M_{m,n^2}(1)$ из k_1^* незачеркнутых столбцов только $\pi(n)$ столбцов имеют по одному нулевому остатку, а остальные являются пустыми, т.е. они не имеют нулевых остатков. Они составлены только из ненулевых остатков. В матрице $M_{m,n^2}(n^2+1)$ все k_2^* незачеркнутых столбцов являются пустыми. Расставим столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставим матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (17.12).

Теорема 17.5 *Имеет место соотношение*

$$2(\pi(n))^2 - 2[\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) \leq 2(\pi(n))^2 - [\log_2 n] + 1. \quad (17.13)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n^2}(1)$ и $M_{m,n^2}(n^2+1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим их, как в Теореме 17.3. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых в строках $1 < i \leq m$ имеет минимум 2 нулевых остатка, $m_* = m + m^*$, $m^* = \pi(\sqrt{2n^2})$, $m = \pi(n^2)$, $1 < i \leq m^*$.

1) Количество незачеркнутых столбцов в матрице $M_{m,n^2}(1)$ есть

$$k_1^* = \pi(n^2) + 2[\log_2 n],$$

т.к. столбец, который соответствует числу 1, составлен только из ненулевых остатков. Следовательно, в этих k_1^* незачеркнутых столбцах количество ненулевых остатков есть

$$k_1 = k_1^* \cdot \pi(n) - k_1^* + 1 = k_1^*(\pi(n) - 1) + 1.$$

2) В матрице $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Так как среди чисел $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, (n + 1)^2$ имеется только одно число вида 2^r . Следовательно, в этих k_2^* незачеркнутых столбцах количество ненулевых остатков есть

$$k_2 = k_2^* \cdot \pi(n) - 1.$$

Потому что в каждом из столбцов матриц есть $\pi(n)$ нулевых и ненулевых остатков, и в каждой строке каждой матрице есть n^2 нулевых и ненулевых остатков.

После расширения матриц имеет место соотношение

$$\overline{M}_{m_*,n^2}(n^2 + 1) - \overline{M}_{m_*,n^2}(1) = c_*(m_*, n, n^2 + 1).$$

Учитывая это соотношение, сопоставим матрицы у которых столбцы расположены так, что с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а с другой зачеркнутые, получим соотношение (17.13).

Замечание. Учитывая $\nu(2n^2)$, величину $\pi(2n^2)$ можно определить с точностью до 1.

Теоремы 17.3-17.5 тоже являются следствиями Теоремы 17.1.

Но т.к. они оценивают количество простых чисел на различных участках числовой оси по отношению к нулевой точке (начало отсчета), мы рассматриваем их как отдельные теоремы.

Глава 18

Соизмеримые и несоизмеримые отрезки

Упрощая уравнение

$$(xn)^2 + (yn)^2 = (zn)^2, \quad (18.1)$$

где n - произвольное натуральное число, и принимая $x = y = a$, $z = d$, получаем

$$a^2 + a^2 = d^2, \quad (18.2)$$

где a - сторона, d - диагональ квадрата.

Существующая математика вместо объяснения равенства (18.2) удовлетворяется только объявлением, что сторона и диагональ квадрата - несоизмеримые отрезки. Этим самым проблема “магических квадратов” загоняется в тупик так, что математики почти ее не замечают. Но зря, потому что объяснение истиной сущности равенства (18.2) привело бы к тем противоречиям, которые возникают на числовой оси из за главной аксиомы, которая гласит, что число „НОЛЬ“ кратно всем целым числам.

Матричная математика рассматривает равенство (18.2) как сумму двух подобных матриц, имеющих тождественно одинаковые размеры, и превращает его в тождество. Так как количество нечетных чисел на отрезке $[1, 2n - 1]$ и четных чисел на отрезке $[2, 2n]$ составлено из n таких отрезков, в каждом из которых содержится два отрезка единичной длины. Следовательно, они имеют равную длину, но определены (измерены) по отношению к различным точкам на числовой оси.

Для несоизмеримых отрезков имеет место соотношение

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 + 2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2. \quad (18.3)$$

Представляя четные и нечетные числа на различных числовых осях, начало отсчета у которых по отношению друг к другу смещены на отрезок единичной длины, приводим их к единой размерности. Это позволяет рассматривать нечетные (четные) числа, как сумму определенного количества двоек. Таким образом на числовой оси числовые операции производятся не точками, которые именовались числами, а количеством единичных отрезков, которые плотно расставлены между этим точками (числами). Изучение числовых процессов облегчается, если мы рассматриваем их на различных числовых осях, для которых как масштаб используются простые числа $\leq n$. Таким образом, каждому простому числу соответствует своя ось, на которой это простое число задает масштаб. При доказательстве теорем с помощью матриц остатков мы воспользовались этим способом, т.е. иногда мы использовали $\pi(n)$ осей. С точки зрения существующей математики в равенстве (18.2) переход от $(a, a) = a$ к $(a, d) = 1$ необъясним, потому что теряется истинная сущность равенства. Но в матричной математике это становится полностью ясным и объяснимым. Числовой “хаос”,

который “главная аксиома” создает на числовой оси, матрица остатков приводит к определенной закономерности.

Матричная математика привела нас к тому, что масштаб числовой оси не может стать нулем, и не зависит от того, занимает он часть прямой, или кривой линии. С увеличением (уменьшением) числа сторон правильного многоугольника, в которые вписаны (описаны) окружности, невозможно добиться равенства их радиусов. В данном многоугольнике радиусы описанной и вписанной окружностей образуют между собой угол определенной величины, который зависит только от стороны многоугольника, или, точнее, от масштаба числовой оси, на которой лежит данная сторона. Превращая уравнение $x^2 + y^2 = z^2$ в равенство $x^2 + y^2 = r^2$ или в равенство $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ одновременно превращаем их в тождества, которые показывают расстояние между двумя точками на различных участках, и зависят только от масштаба данной числовой оси.

Нетрудно заметить, что не только сторона квадрата несоизмерима с радиусами описанной и вписанной окружности, но и сторона равностороннего треугольника. Поэтому диаметр окружности несоизмерим с длиной окружности и диаметр шара несоизмерим с плоскостью поверхности шара. Это привело к появлению иррационального и трансцендентного числа $\pi \approx 3.14$. Для эллипса и эллипсоидов несоизмеримые отрезки проявляются в виде фокусных расстояний факальных поверхностей.

Матричная математика числовую ось превращает в сумму (совокупность) бесчисленного количества соизмеримых и несоизмеримых отрезков, в виде составных и простых столбцов (чисел), которые группируются в матрицах остатков, независимо от того они расположены на прямой линии или кривой.

Весь вопрос в том, как найти закономерности распределения этих матриц (столбцов, чисел) на числовой оси.

Понятие натурального нуля (0_n), где $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$, облегчает решение этого вопроса. Число 0_n вынуждает признать, что число 1 (масштаб числовой оси) есть начало расчета нечетных, а число 2 начало расчета четных чисел. Отделяя четные числа от нечетных, 0_n становится осью симметрии для этих чисел, которые равномерно расположены по двум сторонам 0_n , превращая числовую ось в прерывистую линию. Таким образом, число 0_n позволяет числовые проблемы, возникающие на больших интервалах чисел свести к проблемам малых интервалов, которые расположены вблизи 0_n и, с их помощью, решить проблему больших интервалов. То есть $\pi(n^2)$ определить с помощью $\pi(n)$ и $[\log_2 n]$, учитывая инвариантность числовых процессов (закономерности числообразования) на числовой оси.

Главной недостаток существующей математики в том, что она забывает первоначальное определение числовой оси и числовую ось рассматривает как непрерывную линию. Сталкиваясь с проблемами во всех разделах математики, она героическими усилиями старается решить эти проблемы, но часто терпит поражение, потому что, принимая число 0 кратным всем целым числам, забывает, что число 1 (масштаб числовой оси) не кратно любому другому числу.

Матрица остатков старается согласовать эти аксиомы между собой.

Глава 19

Противолежащие и сдвинутые матрицы остатков

Определение 19.1 Подобные матрицы, которые не имеют общих столбцов, называются *противолежащими матрицами остатков*. Например, матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| > n$.

Определение 19.2 Подобные матрицы, имеющие общие столбцы, называются *сдвинутыми матрицами остатков*. Например, матрицы $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| < n$.

Определение 19.3 Расстояние между двумя точками на числовой оси равно разности чисел, соответствующих этим точкам.

Определение 19.4 Порядковые номера столбцов матриц определяются не только по отношению к начальному столбцу в правую сторону, но и по отношению к началу отсчета на данной числовой оси.

Теорема 19.1 В противолежащих матрицах $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| > n$, имеется не менее чем $\left\lceil \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rceil - \nu(n)$ столбцов, в каждом из которых нет ни одного нулевого остатка в строках $1 < i \leq m$, если $8 < n < \lambda$.

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$, где $(n, \lambda) = \nu(n)$, $m = \pi(n)$, $8 < n < \lambda$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m$.

1) В матрице $M_{m,n}(1)$ количество зачеркнутых столбцов есть

$$k_1 = n - [\log_2 n] - 1,$$

а количество незачеркнутых столбцов есть

$$n - k_1 = [\log_2 n] + 1.$$

Потому что столбец, соответствующий числу 1 не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,n}(\lambda)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим $k_2^* = \alpha_1 + \alpha_2$.

Где α_1 - количество тех незачеркнутых столбцов, в каждом из которых есть только один нулевой остаток, и этот нулевой остаток находится в строке $i = 1$.

α_2 - количество тех незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, которые являются пустыми, т.е. не имеют нулевых остатков.

Следовательно, количество зачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ есть

$$k_2 = n - k_2^* = n - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Поскольку

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1) = c(m, n, \lambda). \quad (19.1)$$

Так как $c^*(m, n, \lambda) \leq c(m, n, \lambda)$ и при $2 \nmid n, 2 \mid \lambda$ количество четных столбцов (соответствующих четным числам) в матрице $M_{m,n}(\lambda)$ на 1 больше, чем количество четных столбцов в матрице $M_{m,n}(1)$, то имеет место соотношение

$$\overline{M}_{m,n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}^{k_1}(1) \geq c^*(m, n, \lambda) + \alpha_1 + 1. \quad (19.2)$$

Вычитая (19.2) из (19.1), получим $\alpha_1 - \lfloor \log_2 n \rfloor \leq 1 - \alpha_1$, или

$$\alpha_1 \leq \left\lfloor \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{2} \right\rfloor + \nu(n).$$

Таким образом получаем, что количество незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ есть

$$k_2^* - \alpha_1 = \alpha_2 \geq \left\lfloor \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor}{2} \right\rfloor - \nu(n).$$

Потому что возможно число $a = \lfloor \log_2 n \rfloor$ - нечетное.

Отметим, что

1) При $\lambda \leq n^2$ получаем, что α_2 - количество простых чисел.

2) При $\lambda > n^2$ среди α_2 чисел могут быть числа вида $p_k^r, p_c p_d$, где p_k, p_c, p_d - простые числа, большие n .

Так как в доказательстве теоремы $\lambda > n$ может принимать произвольные значения, следовательно Теорема верна для всех противоположащих матриц $M_{m,n}(\lambda_1)$ и $M_{m,n}(\lambda_2)$, где $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| < n$.

Теорема 19.1 полностью доказана.

Глава 20

Двойное решето

Определение 20.1 Метод зачеркивания столбцов в матрице $M_{m,2n}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, в каждом из которых есть минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$, называется двойным решето.

Двойное решето позволяет выразить количество простых чисел $\pi(kn) - \pi(n)$ через функции $\pi(n)$ и $\log_2 n$, где $n \geq k$ - натуральное число.

Теорема 20.1 Имеет место соотношение

$$\pi(4n) - \pi(2n) \geq \pi(2n) - \pi(n),$$

если $n \geq 10$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,4n}(1)$, где $m = \pi(2n)$, $n \geq 10$. Представим эту матрицу в виде

$$M_{m,4n}(1) = N_{m,2n}(2 \nmid 1) + N_{m,2n}(2|2), \quad n \geq 10.$$

1) В матрице $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$ проведем метод двойного решета, т.е. зачеркнем те столбцы этой матрицы, которые соответствуют составным числам. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_1^* , получим

$$k_1^* = \pi(4n).$$

Это следует из того, что столбец, который соответствует числу 1, тоже незачеркнут.

Количество зачеркнутых столбцов в этой матрице обозначается k_1 , получим

$$k_1 = 2n - k_1^*.$$

2) В матрице $N_{m,2n}(2|2)$ тоже проводим метод двойного решета, т.е. зачеркиваем только те столбцы, которые соответствуют числам $2p_i$, где $2 < p_i \leq 2n$. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначается k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице обозначается k_2 . Получим

$$k_2^* = \pi(4n) - \pi(2n) = \pi(2n) - \pi(n) \geq [\log_2 n],$$

а зачеркнутых

$$k_2 = 2n - k_2^*.$$

Расставляя столбцы матриц $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$ и $N_{m,2n}(2|2)$ по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов,

получим теорему. Потому что количество столбцов матриц $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$ и $N_{m,2n}(2|2)$ равны между собой. Теорема 20.1 доказана.

Примечание. Возникает вопрос, как определить количество простых столбцов (пустых, не содержащих нулевых остатков) матрицы, если ее столбцы соответствуют отрицательным числам? В существующей математике нет отрицательных простых чисел, потому что расстояние между числом 0 и числом 1 не всегда учитывается. И получаем, что половина 30 равна 15. Но если на числовой оси заданы 30 точек, то одна половина этих точек находится слева от точки, стоящей между 15-й и 16-й точками, а вторая половина находится справа от этой.

Рассмотрим матрицу $M_{m,2n}(-(n-1))$, которая составлена из чисел

$$-(n-1), -(n-2), -(n-3), \dots, -1, O_n, 1, 2, \dots, n.$$

Здесь $m = \pi(n)$.

Среди столбцов этой матрицы, которые соответствуют числам $-(n-1), -(n-2), -(n-3), \dots, -1, O_n$ тоже есть столбцы, которые соответствуют числам $[\log_2 n]$. Следовательно, они соответствуют простым числам. Ведь несоизмеримые отрезки не зависят от того, где они находятся на числовой оси.

Теорема 20.2 Любую квадратную матрицу можно представить как сумму определенного количества противоположащих матриц.

Доказательство. Напомним, что матрица называется квадратной, если количество ее столбцов равно полному квадрату натурального числа. Сначала докажем теорему для матриц $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$.

Так как

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + M_{m,n}(2n+1) + \dots + M_{m,n}(n(n-1)+1) = \\ &= M_{m,2n}(1) + M_{m,2n}(2n+1) + \dots + M_{m,2n}((n-1)^2+1) = \\ &= M_{m,3n}(1) + M_{m,3n}(3n+1) + \dots + M_{m,3n}(n^2-3n+1) = \\ &\dots\dots\dots \\ &= M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda+1). \end{aligned}$$

Здесь $m = \pi(n)$, $\lambda = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$.

Следовательно, теорема доказана для начальной матрицы $M_{m,n^2}(1)$. Аналогично теорему можно доказать и для любой матрицы $M_{m,n^2}(\lambda)$.

Теорема 20.3 Любую квадратную матрицу можно представить как сумму определенного количества сдвинутых матриц.

Доказательство. Так как матрицу $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$, можно представить в виде

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,n(n-1)}(1) + M_{m,n(n-1)}(n+1), \quad (20.1)$$

или

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,kn}(1) + \dots + M_{m,kn}(kn+1), \quad (20.2)$$

где $m = \pi(n)$, $k \leq n$.

Следовательно, теорема доказана для начальной квадратной матрицы.

Аналогично можем получить доказательство теоремы для матриц $M_{m,n^2}(\lambda)$, где $k \leq n \leq \lambda$. Потому, что матрицы, которые находятся в правой части равенства (20.1) сдвинутые матрицы остатков.

Следствие 20.1 Матрицы остатков с шагом h , т.е. $N_{m,n}(n \nmid \lambda)$ и $N_{m,n}(n|\lambda + 1)$ являются сдвинутыми матрицами остатков.

Доказательство. Напомним, что матрицы остатков с шагом h определены в главе 5, пункт 5.4. Принимая $h = 2$, получаем матрицы $N_{m,n}(2 \nmid 1)$ и $N_{m,n}(2|2)$, которые на самом деле сдвинутые матрицы остатков, они по отношению друг к другу сдвинуты на отрезок единичной длины. Следовательно, при любом значении h эти матрицы будут сдвинуты по отношению друг к другу на величину $h - 1$.

Теорема 20.4 Имеет место соотношение

$$\pi(n^2) - \pi((n-1)^2) = [\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, \text{ if } \nu(2n) > 2 \end{array} \right\}. \quad (20.3)$$

Доказательство. Рассмотрим начальную квадратную матрицу $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$. Ее представим в виде

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,(n-1)^2}(1) + M_{m,(n-1)^2}(2n+1) + M_{m,2n}(1) = \\ &= M_{m,n^2-4n}(1) + M_{m,n(n-1)}(n+1) + M_{m,2n}((n-1)^2+1), \end{aligned}$$

где $m = \pi(2n)$, $k \leq n$.

Так как матрицы $M_{m,(n-1)^2}(1)$ и $M_{m,(n-1)^2}(2n+1)$ сдвинутые, следовательно, они имеют общие столбцы, которые соответствуют числам

$$2n+1, 2n+2, \dots, (n-1)^2.$$

Зачеркнем все те столбцы матрицы $M_{m,(n-1)^2}(1)$, каждый из которых имеет минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(2n)$. В матрице $M_{m,(n-1)^2}(2n+1)$ зачеркнем все те столбцы матрицы, которые соответствуют составным числам. Обращая внимание на матрицы с зачеркнутыми столбцами, заметим:

1) В матрице $M_{m,2n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = [\log_2 n] + 2.$$

Среди чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$ есть только одно число вида 2^r , и столбец, соответствующий числу 1, тоже не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,n^2-4n}(2n+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi((n-1)^2) - \pi(2n).$$

3) В матрице $M_{m,2n}((n-1)^2+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_3^* = \pi(n^2) - \pi((n-1)^2).$$

Так как при $2 \nmid n$ количество нечетных столбцов матрицы $M_{m,n^2}(1)$ на 1 (единицу) больше, чем четных столбцов этой же матрицы, и учитывая, что в матрице $M_{m,2n}(1)$ простые числа p_i , где $2 \leq p_i < 2n$, тоже зачеркнуты, а в матрице $M_{m,n^2-4n}(2n+1)$ на $[\log_2 n] + 1$ четных столбцов больше зачеркнуто, чем в матрице $M_{m,(n-1)^2}(1)$, получим утверждение (20.3). Теорема 20.4 доказана.

Следствие 20.2 Имеет место соотношение

$$\pi(n^2) - \pi((n-2)^2) = 2[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ -1, \text{ if } \nu(2n) > 2 \end{array} \right\}; \quad (20.4)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,4n}(1)$ и $M_{m,4n}((n-2)^2+1)$, где $m = \pi(n)$. Зачеркнем все те столбцы у этих матриц в каждом из которых имеется минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(2n)$. Сопоставляя эти матрицы с зачеркнутыми столбцами по максимальному количеству нулевых остатков, получим Следствие 20.2.

Следствие 20.3 В матрице $M_{m,2n}(kn+1)$, где $m = \pi(n)$, $2 < k \leq n$ имеется не менее $\lfloor \frac{\log n}{2} \rfloor - 1$ столбцов, в каждом из которых нет ни одного нулевого остатка в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$.

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(kn+1)$, где $m = \pi(n)$, $2 < k \leq m = \pi(n)$. Зачеркивая все те столбцы у этих матриц в каждом из которых имеется минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m$, и сопоставляя матрицы с зачеркнутыми столбцами по максимальному количеству нулевых остатков, получим Следствие 20.3.

Следствие 20.4 Имеют место соотношения

$$\pi(n^2) \geq 2\pi \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor - [\log_2 n] + \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}; \quad (20.5)$$

$$\pi(n^2) \leq 2\pi \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + [\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 2 \end{cases}; \quad (20.6)$$

Доказательство. Матрицу $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$, представим в виде

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n^2-6n}(1) + M_{m,n^2-6n}(3n+1) = \\ &= M_{m,3n}(1) + M_{m,n^2-6n}(3n+1) + M_{m,3n}(n^2-6n+1), \end{aligned}$$

где $m = \pi(3n)$. В матрице $M_{m,n^2-6n}(1)$ зачеркнем все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(3n)$. В матрице $M_{m,n^2-6n}(3n+1)$ зачеркнем все столбцы, которые соответствуют составным числам.

1. В матрице $M_{m,3n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = [\log_2 n] + 2,$$

потому что столбец, соответствующий числу 1, не зачеркнут, и среди чисел $n+1, n+2, \dots, 3n$ имеется только одно число вида 2^r .

2. В матрице $M_{m,n^2-6n}(3n+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi(n^2 - 6n) - \pi(3n).$$

3. В матрице $M_{m,3n}(n^2 - 6n + 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_3^* \geq [\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 2 \end{cases}.$$

Следовательно, сопоставляя количество зачеркнутых и незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(3n)$, получим соотношение (20.5).

Представляя матрицу $M_{m,n^2-8n}(1)$, где $m = \pi(4n)$, в виде

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n^2-8n}(1) + M_{m,n^2-8n}(4n+1) = \\ &= M_{m,4n}(1) + M_{m,n^2-8n}(4n+1) + M_{m,4n}(n^2 - 8n + 1), \end{aligned}$$

и рассуждая аналогичным образом, получим соотношение (20.6). Следствие 20.4 доказано.

Следствие 20.5 Если $2n < \lambda < n^2$, то имеет место соотношение

$$[\log_2 n] - 1 \leq \pi(\lambda + 2n) \leq \pi(n) + 1.$$

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы.

Теорема 20.5 Имеет место соотношение

$$\pi(n^2) = 2\pi[n^2/2] - \pi(n) + [\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, \text{ if } \nu(2n) > 2 \end{array} \right\}. \quad (20.7)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$. Ее представим в виде

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1) = N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) + M_{m,\lambda}(2|2),$$

где $m = \pi(n)$, $\lambda = [n^2/2]$.

Зачеркнем все те столбцы матрицы $M_{m,n^2}(1)$, каждый из которых имеет как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$. Кроме тех, которые соответствуют простым числам.

1. В матрице $M_{m,\lambda}(1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_1^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_1 . Получим

$$k_1^* = \pi(\lambda) + 2[\log_2 \lambda] + 1, \quad k_1 = \lambda - k_1^*.$$

2. В матрице $M_{m,\lambda}(\lambda + 1)$ зачеркнем еще и те столбцы, которые соответствуют составным числам. Заметим, что в этой матрице количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \pi(2\lambda) - \pi(\lambda),$$

а количество зачеркнутых столбцов

$$k_2 = \lambda - k_2^*.$$

Учитывая, что

$$\overline{M}_{m,\lambda}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m,\lambda}(1) = c(m, n, \lambda)$$

и

$$\overline{M}_{m,\lambda}^{k_2}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m,\lambda}^{k_1}(1) \geq c(m, n, \lambda) + \pi(n),$$

а разность зачеркнутых четных столбцов матриц $M_{m,\lambda}(\lambda + 1)$ и $M_{m,\lambda}(1)$ равна

$$[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, \text{ if } \nu(2n) > 2 \end{array} \right\},$$

где $1 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n)$.

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, заметим, что

$$\pi(n^2) = 2\pi(n^2/2) - \pi(n) + [\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, \text{ if } \nu(2n) > 2 \end{array} \right\}. \quad (20.8)$$

Это следует из того, что столбец, соответствующий числу n^2 , при любой четности n зачеркнут, и теорема 20.5 полностью доказана.

Примечание. Такой же результат мы получили бы рассматривая матрицы $N_{m,\lambda}(2 \nmid 1)$ и $N_{m,\lambda}(2|2)$.

Следствие 20.6 *Имеют место соотношения*

$$2\pi(n^2) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(3n^2) \leq 2\pi(n^2) + [\log_2 n] + 1, \quad (20.9)$$

$$\pi(n) + 2\pi(n^2) - 1 \leq \pi(4n^2) \leq 2\pi(n^2) + 1 + \pi(n). \quad (20.10)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,3n^2}(1)$, где $m = \pi(n^2)$, и представим ее в виде

$$M_{m,3n^2}(1) = M_{m,2n^2}(1) + M_{m,2n^2}(n^2 + 1) = N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m,\lambda}(2|2),$$

где $m = \pi(n^2)$, $\lambda = [\frac{3}{2}n^2]$.

1) В матрице $M_{m,2n^2}(1)$ зачеркнем все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(n^2)$. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_1^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_1 . Получим

$$k_1^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + [\log_2(2n^2)], \quad k_1 = 2n^2 - k_1^*.$$

2) В матрице $M_{m,2n^2}(n^2 + 1)$ зачеркнем все те столбцы, которые соответствуют составным числам. Аналогично получаем

$$k_2^* \leq 2\pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Учитывая, что матрицы $M_{m,2n^2}(1)$ и $M_{m,2n^2}(n^2 + 1)$ имеют общие столбцы, которые соответствуют числам $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, 2n^2$, и расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим

$$2\pi(n^2) + [\log_2 n] - 1 \leq \pi(3n^2) \leq 2\pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Таким образом, соотношение (20.9) доказано.

Теперь рассмотрим матрицу $M_{m,4n^2}(1)$, где $m = \pi(n^2)$, и представим ее в виде

$$M_{m,4n^2}(1) = M_{m,2n^2}(1) + M_{m,2n^2}(2n^2 + 1) = N_{m,2n^2}(2 \uparrow 1) + N_{m,2n^2}(2|2),$$

где $m = \pi(n^2)$.

Рассуждая так же, как в предыдущем пункте, получим соотношение (20.10). Следствие 20.6 полностью доказано.

Теорема 20.6 *Имеют место соотношения*

$$\pi(n^2) = 2\pi[n^2/2] - \pi(2n) + \pi(n) - [\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases} \quad (20.11)$$

и

$$\pi(n^2) = 2\pi[n^2/2] - 2[\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}. \quad (20.12)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$, и представим ее в виде

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1) = N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m,\lambda}(2|2),$$

где $\lambda = [n^2/2]$.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых имеет как минимум один нулевой остаток в строках $1 \leq i \leq m = \pi(n)$. Кроме тех, которые соответствуют простым числам $> n$.

1. В матрице $M_{m,(n-1)^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_1^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_1 . Получим

$$k_1^* = \pi((n-1)^2) - \pi(n), \quad k_1 = (n-1)^2 - k_1^*.$$

2. В матрице $M_{m,(n-1)^2}(2n+1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 . Получим

$$k_2^* = \pi(n^2) - \pi(2n) + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},$$

$$k_2 = (n-1)^2 - k_2^* = (n-1)^2 - \pi(2n) + \pi(n) - [\log_2 n] - 1.$$

Это следует из того, что столбец, соответствующий числу n^2 , при любой четности n зачеркнут, и при $2 \nmid 1$ количество нечетных столбцов матрицы $M_{m,(n-1)^2}(1)$ на 1 меньше, чем количество нечетных столбцов матрицы $M_{m,(n-1)^2}(2n+1)$.

Учитывая, что эти матрицы имеют общие столбцы, которые соответствуют числам $2n+1, 2n+2, \dots, (n-1)^2$, и расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков, чтобы с одной стороны располагались незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, получим соотношение (20.11), (20.12).

Глава 21

Дальность столбцов в матрицах остатков

Определение 21.1 В матрице остатков $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, $n > 10$, дальность двух столбцов определяется количеством столбцов, которые находятся между ними.

Определение 21.2 Столбцы матрицы остатков, которые имеют одинаковые дальности от среднего столбца данной матрицы, называются противоположащими столбцами.

Определение 21.3 Расстояние между двумя столбцами данной матрицы на 1 меньше, чем дальность этих столбцов.

Теорема 21.1 На числовой оси нет чисел, которые одновременно были бы четными и нечетными, или отрицательными и положительными.

Доказательство. Так как четные и нечетные числа на числовой оси по отношению друг к другу перемещены на длину единичного отрезка (масштаб данной числовой оси), следовательно, теорема не вызывает сомнения.

Следствие 21.1 На числовой оси, как начало нечетных чисел, является точка, которую называем числом 1, а как начало четных чисел является число 2.

Следствие 21.2 Начало числовой оси может стать числом для другой числовой оси, но оно для данной числовой оси есть только точка, а не число.

Следствие 21.3 Нечетные числа, которые находятся на положительном участке числовой оси, на отрицательном участке становятся четными, и наоборот.

Эти следствия тривиально вытекают из Теоремы 21.1 и из первоначального определения числовой оси.

Теорема 21.2 Если $p > 10$ – простое число, то имеет место соотношение

$$2\pi(2p^2) - \pi(p) - 1 \leq \pi((2p)^2) \leq 2\pi(2p^2) + 4[\log_2 p] + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*,(2p)^2}(1)$, где $p > 10$, $m_* = m + m^*$, $i_* = i + i^*$, $m = \pi(2p)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$. Так как матрицу $M_{m_*,(2p)^2}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*,(2p)^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1),$$

где $\lambda = 2p^2$.

1) В матрице $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$ зачеркнем все те столбцы, каждый из которых соответствует составному числу. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_1^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_1 . Получим

$$k_1^* = \pi(2\lambda), \quad k_1 = \lambda - \pi(2\lambda) - 1,$$

потому что столбец, соответствующий числу 1, тоже не зачеркнут.

2) В матрице $N_{m_*,\lambda}(2|2)$ не зачеркиваем только те столбцы, которые соответствуют числам вида $2p_i$, где $2 \leq p_i < 2p^2$. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 . Получим

$$k_2^* = \pi(\lambda) + 2[\log_2 p] + 1,$$

потому что столбец, соответствующий числу 2, не зачеркнут.

Количество зачеркнутых столбцов

$$k_2 \leq \lambda - \pi(\lambda) + 4[\log_2 p] + 1.$$

Расставляя столбцы матриц $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$ и $N_{m_*,\lambda}(2|2)$ по максимальному количеству нулевых остатков и учитывая, что эти матрицы имеют одинаковое количество столбцов, получим Теорему 21.2.

Следствие 21.4 *Имеет место соотношение*

$$2\pi(2n^2) - \pi(n) - 1 \leq \pi((2n)^2) \leq 2\pi(2n^2) + 4[\log_2 n] + 1.$$

Доказательство Следствия 21.4 тривиально вытекает из доказательства Теоремы 21.2.

Теорема 21.3 *Имеют место соотношения*

$$\pi(2^{2n}) \geq 2(\pi(2^n) + 1)^2 - 2\pi(2^n) - 1,$$

$$\pi(2^{2n}) \leq 2(\pi(2^n) + 1)^2 + \pi(2^n) + 1,$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*,2^{2n}}(1)$, где ширина матрицы $m_* = m + m^*$, $i_* = i + i^*$, $m = \pi(2^n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2^{n+1}})$. Зачеркнем все те столбцы, которые соответствуют составным числам.

Матрицу $M_{m_*,2^{2n}}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*,2^{2n}}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1) = N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2),$$

где

$$m_* = m + m^*, \quad m = \pi(2^n), \quad m^* = \pi(\sqrt{2^{n+1}}), \quad \lambda = 2^{2n-1}.$$

Определяя количество зачеркнутых и незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m_*,2^{2n}}(1)$ и сопоставляя их с зачеркнутыми и не зачеркнутыми столбцами матриц $M_{m_*,\lambda}(1)$ и $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$, или с зачеркнутыми и незачеркнутыми столбцами матриц $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$ и $N_{m_*,\lambda}(2|2)$, получим утверждение Теоремы 21.3. Это следует из того, что

$$\overline{M}_{m,\lambda}^{k_2}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m,\lambda}^{k_1}(1) = c(m, n, \lambda) + k_2 - k_1,$$

где k_2 - количество зачеркнутых столбцов матрицы $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$, k_1 - количество зачеркнутых столбцов матрицы $M_{m_*,\lambda}(1)$. Следовательно,

$$k_2^* = k_1^* - \pi(2^n),$$

где k_2^* - количество незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$, k_1^* - количество незачеркнутых столбцов матрицы $M_{m_*,\lambda}(1)$.

Глава 22

Числообразование на числовой оси

Математические операции на числовой оси зависят не только от направления, но и от места (точки), где происходят эти операции. Потому что каждое число (точка) показывает количество единичных отрезков на которые данная точка (число) отдалена от начала числовой оси (нулевая точка, начало отсчета). В этом смысле нулевая точка не должна считаться числом.

Существующая математика, пренебрегая этим, считает начало отсчета не только числом, но и принимает, что оно кратно всем целым числам. Такой подход, который из математики нашего сознания перешел в математику на числовой оси, опирается на то, что расстояние между началом числовой оси (точкой ноль) и числом, которое называем 1, может стать нулем. Это приводит к тому, что расстояние между числом n и $n + 1$ тоже может стать нулем. Но это противоречит первоначальному определению числовой оси и не зависит от того, она прямая или кривая линия. В итоге получаем, что масштаб числовой оси, т.е. 1 (целое) можно разделить на n (произвольное число) равных частей.

С применением координатных систем математики надеялись, что представляя числа не только на линии, но и на плоскости, и в пространстве станет возможным решить числовые проблемы, которые накопились до этого.

Возникли различные функции, геометрии Лобачевского и Римана, положительные и отрицательные четверти, рациональные и иррациональные, действительные и мнимые число, дифференциальное и интегральное исчисления, но числовые проблемы, которые существовали на числовой оси, в общем то не решались, если не сказать, что возникли новые проблемы в области дробных чисел. К их числу относятся проблема Эрдеша-Штраусса (Erdos-Straus) и проблема Анджея Шинцеля (Andrzej Schinzel).

Главный недостаток существующей математики в том, что расстояние между точкой 0 и числом 2, числом -1 и числом +1 не всегда считают равным двум отрезкам единичной длины. Такое пренебрежение приводит к тому, что на числовой оси появляются числа, которые одновременно четные и нечетные, положительные и отрицательные. Математика становится однобокой $(-a)^2 = (a)^2$, а закономерности образования чисел на числовой оси не инвариантными. Рассматривая простые арифметические действия на числовой оси, напрашиваются вопросы: как образуются числа на числовом отрезке $[0, 2n]$? Чтобы можно было ответить на такие вопросы, создали Матричную математику, которое есть обобщение метода математической индукции и метода решета. Выясняется, что во времена Архимеда не напрасно определили простые числа с помощью остатков.

Определение 22.1 Подобные матрицы остатков, у которых расстояние между столбцами, имеющими одинаковые порядковые номера, постоянны и равны между

собой, называются *передвинутыми матрицами остатков*.

Из определения следует, что передвинутыми матрицами могут стать и матрицы с шагом h , и сопряженные матрицы, и смежные матрицы. Как, например $M_{m,n-1}(1)$ и $M_{m,n-1}(n+1)$; $N_{m,n}(2 \nmid 1)$ и $N_{m,n}(2|2)$; $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(\lambda+1)$ где $m = \pi(n)$.

Теорема 22.1 *Каждую квадратную матрицу можно представить в виде суммы определенного количества передвинутых матриц.*

Доказательство. Так как матрицу $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$ можно представить в виде

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + M_{m,n}(2n+1) + \dots + M_{m,n}(n(n-1)+1) = N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m,\lambda}(2|2),$$

где

$$m = \pi(n), \lambda = [n^2/2],$$

то теорема доказана, и она верна для любого значения n_1 , если $M_{m,n^2}(n_1)$, где n_1 - целое число.

Теорема 22.2 *Имеет место соотношение*

$$\pi(n) + [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1. \quad (22.1)$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,2n}(1)$, где $m = \pi(n)$. Расширим эту матрицу, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этой матрицы, разделим еще на простое число p_q^2 , где $2 < p_q \leq \pi(\sqrt{2n})$, и полученные остатки перепишем в соответствующем столбце этой матрицы. Ясно, что ширина этой матрицы, которую мы обозначаем m_* , равна $m_* = m + m^*$, где $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n})$, $p_q \neq 2$, а строки $1 \leq i_* \leq i + i^*$.

Расширенную матрицу обозначим $M_{m_*,2n}(1)$. Зачеркнем все те столбцы этой матрицы, каждый из которых имеет как минимум 2 нулевых остатков. Так как матрицу $M_{m_*,2n}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*,2n}(1) = N_{m_*,n}(2 \nmid 1) + N_{m_*,n}(2|2) = M_{m_*,n}(1) + M_{m_*,n}(n+1),$$

заметим, что

1) В матрице $M_{m_*,n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1,$$

а количество зачеркнутых столбцов

$$k_1 \geq n - k_1^*,$$

потому что среди столбцов матрицы $M_{m,n-1}(n+1)$ есть только один столбец, который соответствует числу 2^r , т.е. содержит только один ноль, который находится в строке $i = 1$. А среди столбцов, которые соответствуют нечетным числам, может быть не более $[\log_2 n]$ столбцов, которые не зачеркнуты.

2) В матрице $M_{m_*,n}(n+1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 . Получим

$$k_2 = n - k_2^* \leq \pi(n) + [\log_2 n] - 1.$$

Расставляя столбцы матриц $N_{m_*,n}(2 \nmid 1)$ и $N_{m_*,n}(2|2)$ по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (22.1). Теорема 22.2 доказана.

Следствие 22.1 *Имеют место соотношения*

$$\pi(n) + [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n) \leq 2\pi(n) - [\log_2 n] - 1.$$

Доказательство следствия тривиально вытекает из доказательства теоремы.

Примечание. Эти теоремы (включая эту, и те, которые были доказаны раньше) подсказывают, что простые числа, и числа вида 2^r , на числовой оси играют почти одинаковую роль, потому что, $\nu(p) \neq \nu(2p)$, $L_m(p) = L(2^p)$, т.е. числа вида p^n , где $n \geq 2$, являются простообразными числами, и если простое число $p_i > 2$, то числа вида p^n при $n > 2$ являются нечетными простообразными числами, а числа вида 2^n являются четными простообразными числами.

Теорема 22.3 *Имеют место соотношения*

$$\pi((2n)^2) \leq (\pi(n) + 1)^2 + [\log_2 n] - 1, \quad (22.2)$$

$$\pi((2n)^2) \geq (\pi(n) + 1)^2 - \pi(2n) - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,(2n)^2}(1)$, где $m = \pi(2n^2)$, $2n^2 + 2n^2 = 4n^2 = (2n)^2$. Расширим эту матрицу, чтобы ее ширина стала $m_* = m + m^*$, где $m = \pi(\sqrt{(2n)^2}) = \pi(2n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n^2})$. Расширенную матрицу обозначим $M_{m_*,(2n)^2}(1)$. Представим ее в виде

$$M_{m_*,(2n)^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2),$$

где $\lambda = 2n^2$.

1) В матрице $N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1)$ зачеркнем все те столбцы, в каждом из которых имеется как минимум 2 нулевых остатка. Количество незачеркнутых столбцов обозначим k_1^* . Имеем

$$k_1^* = \pi((2n)^2),$$

потому что столбец, который соответствует числу 1, тоже не зачеркнут.

Количество зачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_1 . Имеем

$$k_1 = \lambda - k_1^* = 2n^2 - \pi((2n)^2).$$

2) В матрице $N_{m_*,\lambda}(2|2)$ зачеркнем все те столбцы, которые не представлены в виде $2p_i$, где $4 \leq 2p_i < \lambda = 2n^2$. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_2^* , имеем

$$k_2^* \geq \pi(\lambda),$$

потому что только столбец, соответствующий числу $2p_i$ не зачеркнут.

Количество зачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_2 . Получим

$$k_2 \leq \lambda - k_2^* = \lambda - \pi(\lambda).$$

Расставляя столбцы матриц $N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1)$ и $N_{m_*,\lambda}(2|2)$ по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим соотношение (22.2). Теорема 22.3 доказана.

К такому же ответу придем и тогда, когда представим матрицу $M_{m,(2n)^2}(1)$ в виде

$$M_{m,(2n)^2}(1) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1),$$

где $\lambda = 2n(2n - 1)$.

Следствие 22.2 *Имеет место соотношение*

$$f^*(2n^2) - f^*(2n) \geq f^*(2n) - 1.$$

Здесь $f^*(x)$ есть количество простых близнецов среди чисел $[1, x]$, где $x \geq 10$.

Доказательство следствия вытекает из того факта, что $2n = \lfloor \log_2 2^{2n} \rfloor$.

Теорема 22.4 *Имеют место соотношения*

$$\pi(2^{2n}) \geq 2(\pi(2^n) + 1)^2 - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1, \quad (22.3)$$

$$\pi(2^{2n}) \leq 2(\pi(2^n) + 1)^2 + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1.$$

Доказательство. Представим матрицу $M_{m,2^{2n}}(1)$ в виде

$$M_{m,2^{2n}}(1) = N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m,\lambda}(2|2),$$

где $\lambda = 2 \cdot 2^{2n-1}$.

Расширяя матрицу $M_{m,2^{2n}}(1)$, получим теорему, если $m = \pi(2^n)$, а $m^* = \pi(\sqrt{2^{2n-1}})$.

Примечание. Из этих двух последних теорем как следствия можно получить все теоремы, которые были доказаны до этого. Про справедливость этих теорем я знал давно, но не мог их доказать, т.е. объяснить словами. Не напрасно говорят, что то, что невозможно объяснить словами, невозможно будет доказать никакой теоремой.

Глава 23

Главные и побочные фокусы матриц остатков

Определение 23.1 *Средний столбец матрицы остатков называется фокусом этой матрицы.*

Определение 23.2 *Если средний столбец матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, не имеет общего нулевого остатка с крайними столбцами, то этот столбец называется главным фокусом, а крайние столбцы называются побочными фокусами данной матрицы.*

Из определения следует, что матрица обладает главным фокусом и побочными фокусами только тогда, когда обладает средним столбцом, который соответствует числу, не имеющему простых нечетных делителей $\leq n$.

Теорема 23.1 *Каждое простое число p_k может стать главным фокусом некоторой матрицы.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,2n+1}(1)$, где $m = \pi(n)$. Ясно, что если средний столбец этой матрицы соответствует числу $n + 1 = p$, который не имеет нулевых остатков в строках $1 < i \leq t$, где $t = \pi(n)$, $n + 1 = p$. Следовательно, теорема доказана. Очевидно, что она верна и для матриц $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, $n | \lambda$.

Теорема 23.2 *Если матрица обладает главным фокусом, то она обладает определенным количеством побочных фокусов.*

Доказательство. Так как матрица $M_{m,2p-1}(1)$, где $m = \pi(p)$, обладает фокусом, который соответствует числу p , то с двух краев этой матрицы зачеркиваем по n_1 столбцов, где $n_1 < p - 1$. Заметим, что главный фокус матрицы, образованной из незачеркнутых столбцов, соответствует числу p . Следовательно, крайние незачеркнутые столбцы новой матрицы не могут иметь общих нулевых остатков со средним столбцом (главным фокусом). Теорема 23.2 доказана.

Теорема 23.3 *Квадратная матрица $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$, обладает главным фокусом и определенным количеством побочных фокусов.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что матрица $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$, обладает средним столбцом, так как ее крайние столбцы соответствуют числам одинаковой четности. Допустим, что ее средний столбец соответствует числу λ^* . Оно соответствует простому числу p_k , т.е. $p_k = \lambda^*$, где $p_k > p$. В противном случае получаем, что число 1 составное.

К примеру, матрицу $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$, можно представить в виде суммы

$$M_{m,p^2}(1) = M_{m,2p}(1) + M_{m,2p}(2p+1) + \cdots + M_{m,2p}((p-1)^2+1).$$

Следовательно, она состоит из главного и некоторого количества побочных фокусов. Теорема 23.3 доказана.

Следствие 23.1 *Понятие фокусов относительно, т.е. главный фокус одной матрицы может стать побочным фокусом для другой матрицы, и наоборот.*

Доказательство следствия вытекает из доказательства Теоремы 12.3.

Теорема 23.4 *Если число $p^2 + 1$ кратно 5 и $p > 3$, то возможно*

- 1) $p^2 - 2$ и $p^2 + 4$ - простые числа, или
- 2) $p^2 - p - 1$ и $p^2 - p + 1$ - простые числа.

Доказательство. Отметим, что простые числа, которые заканчиваются цифрой 3 или 7, удовлетворяют условию теоремы.

Рассмотрим квадратную матрицу $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$. Так как $p^2 + 1$ кратно 5, следовательно $p^2 - 1$ кратно 3. Но также и $p^2 - p$ кратно p . Получаем, что $p^2 + 2$ кратно 3, а $p^2 + 4, p^2 - 2$ или $p^2 - p - 1$ и $p^2 - p + 1$ возможно не могут быть кратными числам ≥ 3 и $\leq p$. Потому что p^2 соответствует среднему столбцу матрицы $M_{m,2p-1}(p(p-1)-1)$. Таким образом, теорема 23.4 доказана.

Теорема 23.5 *Если число $p^2 - 1$ кратно 5 и $p > 5$, то возможно*

- 1) $p^2 - p - 1$ и $p^2 - p - 1 + 4$ - простые числа, или
- 2) $p^2 + p - 1$ и $p^2 - p - 1 + 4$ - простые числа.

Доказательство. Отметим, что теореме удовлетворяют простые числа, которые заканчиваются цифрой 1 или 9. Так как $p^2 - p$ кратно p , а $p^2 - 1$ кратно 30, следовательно, рассуждая аналогично доказательству Теоремы 23.4, получим доказательство Теоремы 23.5.

Следствие 23.2 *Отрезок чисел $[(p-1)^2 - 1, (p+1)^2 + 1]$ содержит минимум одну пару простых чисел близнецов.*

Следствие 23.3 *Отрезок числовой оси $[(2n-1)^2, (2n+1)^2]$ содержит как минимум одну пару простых чисел близнецов.*

Доказательство следствий 23.2 и 23.3 вытекает из доказательства Теорем 23.4 и 23.5, потому что каждая пара этих матриц является сдвинутыми матрицами по отношению среднего столбца матрицы $M_{m,p^2}(1)$, где $m = \pi(p)$.

Теорема 23.6 *Одно из чисел вида $2^{2n} - 1$ или $2^{2n} + 1$ кратно 5-ти.*

Доказательство. Если $\nu(2n) \geq 1$, то числа $2^{2n} + 1$ кратны 5, потому что число $2^{2n} - 1$ и число $(2^p - 1)(2^p + 1)$ кратны $3p_i$, где $p_i > 5$. Следовательно, числа $2^{2n} + 1$ кратны 5-ти, потому что, если начинаем движение с точки (числа) 3 с длиной шага 2, и через некоторое количество шагов наступим на точку (число) $2^{2n} + 1$, которое должно быть кратно 5. В противном случае, шагая в противоположном направлении от точки $2^{2n} + 1$ с длиной шага 2, если не попадем в точку 5, то и не попадем в точку (число) 3.

При $\nu(2n) = 2$ и $n = p$, если $2^p - 1 = q$ простое число Мерсена, то и $2^q - 1 = M_p$ тоже простое число Мерсена, а если $\nu(2n) = 1$ и $2^{2n} + 1 = F_p$ - простое число Ферма, то $(2^{2n})^2 + 1$ тоже простое число Ферма (глава 6, часть 1 Матричная математика). Так что, все зависит от числа $\nu(n)$ если $\nu(2n) = 2$ и $n = p$. При $2^{2n} - 1$ кратно 5 получаем, что $2^{2n} + 1$ не кратно 5. Но если $2^{2n} - 1$ не кратно 5, то $2^{2n} + 1$ кратно 5. Потому что $2^p + 1$ кратно 3. Теорема 23.6 доказана.

Следствие 23.4 На каждом из отрезков целых чисел $[p^2 - 2(p + 2), p^2]$ и $[p^2, p^2 + 2(p + 2)]$ есть минимум одна пара простых чисел-близнецов.

Доказательство. Рассмотрим нечетные матрицы $N_{m_*,p}(2 \nmid 1)$, $N_{m_*,p}(2 \nmid p^2 + 2(p + 2))$ и $N_{m_*,p}(2 \nmid p^2 - 2(p + 2))$, где $m_* = m + m^*$, $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(2p)$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц в каждом из которых есть минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i^* \leq m^*$.

1) В матрице $N_{m_*,p}(2 \nmid 1)$ незачеркнутые столбцы соответствуют простым числам $\pi(2p)$ и числу 1, среди которых уже числа 3 и 5, 5 и 7 составляют простые близнецы.

2) В матрице $N_{m_*,p}(2 \nmid p^2 + 2(p + 2))$ незачеркнутые столбцы соответствуют простым числам p_m , $p^2 < p_m \leq p^2 + 2(p + 2)$.

Расставляя столбцы этих матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы в таком расположении столбцов получим следствие.

Это объясняется тем, что если каждое из простых чисел p_m последовательно делить на 5 или 3, то в конце получим остатки 4 и 2. Так как количество чисел p_m не менее чем $\lfloor \log_2 p \rfloor$, то среди них обязательно найдется минимум одна пара p_{m+1}^* и p_m^* которые при делении 3 и 5 получают одинаковые остатки, т.е. $p_{m+1} - p_m = 2$, и составляют простые близнецы. Это подтверждается формулами

$$0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n), \quad L_m(0_n) = 0, \quad L_m(1) = \pi(n), \quad \nu_m(0_n) = \pi(n), \quad \nu_m(1) = 0.$$

Аналогично, можно доказать следствие и для матрицы $N_{m_*,p}(2 \nmid p^2 - 2(p + 2))$.

Пояснение. Следствие 23.4 тривиально вытекает из теоремы 23.6 и где-то обобщает ее, потому что простые столбцы (соответствующие простым числам) в матрице $M_{m_*,2p^2-1}(1)$, средний столбец которой соответствует числу p^2 , распределены по определенной закономерности. Поэтому не только распределение простых чисел, но и простые-близнецы распределены симметрично относительно среднего столбца и зависят не только от направления их расчета, но и от типа простых чисел, т.е. они вида $4x - 1$ или $4x + 1$.

Учитывая все результаты, которые были получены до этого, приходим к выводу, что на числовой оси число показывает количество единичных отрезков, которые плотно расставлены между двумя точками, из которых одну называем нулевой, а другую числом. Так как наша математика десятиричная, поэтому простые числа 2, 3, 5 и 7 приобретают особое значение, потому что

$$\pi(10) = \pi[\log_2 2^{10}].$$

Существующая математика, считая началом отсчета 0 (ноль), не учитывает, что 0 - это только точка, а не число, которое возбуждает на числовой оси себе подобные, т.е. создает точки, которые только точки, а не числа. Например, средний столбец матрицы $M_{m,2n+1}(0)$, где $m = \pi(n)$ создает все проблемы на числовой оси и закономерности на числовой оси становятся неинвариантными.

Натуральный ноль (0_n) есть натуральное число, оно подсказывает, что начало нечетных чисел есть 1 (один), а начало четных чисел 2 (два), и указывает, что на числовой оси не могут быть числа, которые одновременно и четные и нечетные. Такой подход приводит к осмыслению решений уравнений любой степени.

Рассмотрим самое простое из них в общем виде. Принято говорить, что линейное уравнение $ax - b = 0$, где a и b натуральные числа, имеет одно решение. Получаем, что

$x = \frac{b}{a}$. Отсюда следует, что только значение $b = 0$ или $a|b$ удовлетворяет уравнению. А что делать, если $b \neq 0$, $a \nmid b$? Или если $b \neq 0, a = 0; a = 0, b = 0$?

Матрицы остатков подсказывают, что любая матрица имеет ось симметрии, которая становится точкой на числовой оси. Эта точка иногда есть натуральное число в виде среднего столбца этой матрицы, а иногда данная матрица не обладает средним столбцом на данной числовой оси. Чтобы она обладала средним столбцом, приходится изменять масштаб данной числовой оси, т.е. каждый единичный отрезок, который плотно расставлен между двумя точками, приходится разделять на определенное количество частей и сталкиваться с соизмеримыми и несоизмеримыми отрезками, т.е. сталкиваемся с проблемой делимости.

Вводя прямоугольные координаты, математики старались осмыслить образование чисел на различных числовых осях, которые проходят через начало этой системы. Числа на этих осях получили геометрическое представление, возникли геометрии Лобачевского и Римана, но количество проблем на числовой оси не изменилось. Если не учитывать того, что появились новые проблемы. Создали теорию комплексных переменных, появились мнимые решения уравнений, но почти ничего не изменилось. Как и тогда, когда использовали тригонометрию на числовой оси. Конечно, уравнение n -ой степени имеет n решений. Весь вопрос в том, сколько из них действительных, и сколько мнимых, и как и где они расположены.

Принимая число 1 как начало нечетных чисел, а число 2 как начало четных, получим, что любое число на числовой оси можно рассматривать как начало отсчета чисел, которые находятся справа или слева от этого числа. Принимая 0_n (натуральный ноль) кратным всем простым числам на числовом отрезке $[1, 0_n - 2]$, получаем, что $0_n - 1$ и $0_n + 1$ простые числа. Таким образом, уравнение любой степени можно свести к линейному уравнению, поскольку

$$[\log_x x^n] = n.$$

Так как числа N и N^2 имеют одинаковое количество простых различных делителей, следовательно, любое квадратное уравнение имеет или 2 действительных, или 2 мнимых корня, или 1 действительный и 1 мнимый корень. Аналогично, уравнение 3 степени имеет или 3 действительных (иррациональных), или 3 мнимых корней, или 1 действительный, и 2 мнимых корней, и обратно. Возникает вопрос, а что из себя представляют рациональные, иррациональные, мнимые или комплексные корни (решения) уравнений? Как их осмыслить?

Глава 24

Распад числовой оси. Простые матрицы

Определение 24.1 Если столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, где $n \geq 10$; $m = \pi(n)$, $n \leq \lambda \leq n^2$ имеет только один нулевой остаток, или не имеет нулевого остатка, то такой столбец называется простообразным столбцом данной матрицы, а число соответствующее простообразному столбцу, называется простообразным числом.

Определение 24.2 Столбец матрицы $M_{m,n}(\lambda)$, где $10 \leq n < \lambda \leq n^2$; $m = \pi(n)$, который соответствует простому числу, называется простым, а соответствующий составному числу, составным столбцом данной матрицы.

Теорема 24.1 В матрице $M_{m,n}(1)$, где $n \geq 10$; $m = \pi(n)$, содержится $\pi(n) + [\log_2 n]$ простообразных, $\pi(n)$ простых и $n - \pi(n)$ составных столбцов.

Доказательство теоремы тривиально, т.к. столбец, соответствующий числу 1, не считаем простым числом, а число 2 одновременно и простое и простообразное.

Теорема 24.2 В матрице $M_{m,2p}(1)$, где $p > 10$ простое число, содержится $m = \pi(p) + [\log_2 p]$ простых и $2p - \pi(p) - [\log_2 p] - 1$ составных столбцов.

Доказательство. Матрицу $M_{m,2p}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m,2p}(1) = N_{m,p}(2 \nmid 1) + N_{m,p}(2|p+1),$$

или

$$M_{m,2p}(1) = M_{m,p}(1) + M_{m,p}(p+1),$$

где $p > 10$; $m = \pi(p)$.

Зачеркивая столбцы матриц, которые соответствуют составным числам, и учитывая, что количество столбцов матриц равны между собой, получаем.

1) В матрице $M_{m,p}(1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_1^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_1 , тогда имеем

$$k_1^* = \pi(p) + 1, \quad k_1 = p - k_1^*.$$

Здесь учтено, что столбец, соответствующий числу 1, не зачеркнут.

2) В матрице $M_{m,p}(p+1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 , тогда имеем

$$k_2^* \geq \pi(2p) - \pi(p) - 1, \quad k_2 = p - k_2^*.$$

Это следует из того, что среди чисел $p+1, p+2, \dots, 2p$ имеется только одно число вида 2^r .

Так как $\overline{M}_{m,p}(p+1) - \overline{M}_{m,p}(1) = c(m, p, p+1)$, то

$$\overline{M}_{m,p}^{k_2}(p+1) - \overline{M}_{m,p}^{k_1}(1) = c(m, p, p+1) + \pi(p) - 1.$$

или

$$\overline{M}_{m,p}^{k_2}(p+1) - \overline{M}_{m,p}^{k_2}(1) = c(m, p, p+1) - [\log_2 p] - 1.$$

Здесь из матрицы $M_{m,p}(p+1)$ выбраны все те столбцы, каждый из которых содержит минимум один нулевой остаток в строках $1 \leq i \leq m = \pi(p)$, т.е. столько же, сколько было зачеркнуто в матрице $M_{m,p}(p)$. Из последнего равенства следует, что

$$\pi(2p) - \pi(p) \geq [\log_2 p] - 1.$$

Этот же ответ получим и тогда, когда столбцы матриц $M_{m,p}(1)$ и $M_{m,p}(p+1)$ расставим по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставим матрицы с таким расположением столбцов. Аналогично можно легко получить и другие пункты Теоремы 24.2.

Следствие 24.1 *Имеет место соотношение*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq [\log_2 n] - 1.$$

Доказательство следствия следует из значения величины $\nu(2n)$.

Теорема 24.3 *Если p - простое число, то имеет место соотношение*

$$\pi(4p) - \pi(2p) \geq \pi(p) + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,2p}(1)$ и $M_{m,2p}(2p+1)$, где $m = \pi(p)$. Зачеркнем все те столбцы у этих матриц, которые соответствуют составным числам.

1) В матрице $M_{m,2p}(1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi(2p) + 1,$$

а количество зачеркнутых столбцов

$$k_1 = 2p - k_1^* \geq 2p - \pi(p) - 1.$$

2) В матрице $M_{m,2p}(2p+1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 , тогда имеем

$$k_2^* = \pi(4p) - \pi(2p) - 1,$$

а количество зачеркнутых столбцов

$$k_2 = 2p - \pi(p) + 1.$$

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим Теорему 24.3. Это следует из того, что имеет место равенство

$$\overline{M}_{m,2p}(2p+1) - \overline{M}_{m,2p}(1) = c(m, 2p, 2p+1).$$

Следовательно,

$$\overline{M}_{m,2p}^{k_2}(2p+1) - \overline{M}_{m,2p}^{k_2}(1) = c(m, 2p, 2p+1) + \pi(p) + 1.$$

Здесь символ $\overline{M}_{m,2p}^{k_2}(1)$ показывает, что из матрицы $M_{m,2p}(1)$ тоже выбрано столько столбцов, сколько было зачеркнуто в матрице $M_{m,2p}(2p+1)$. Учитывая, что среди k_2 выбранных из двух матриц столбцов выбраны и те столбцы, которые вида 2^r , где r - натуральное число.

Следствие 24.2 *Имеет место соотношение*

$$\pi(n) + [\log_2 n] - \nu(n) \leq \pi(2n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + \nu(n).$$

Доказательство следствия тривиально вытекает из доказательства теоремы. Потому что в каждом из зачеркнутых столбцов матриц под порядковым номером j

$$L_m(j) = \pi(n) - \nu_m(j),$$

где $\nu_m(j)$ есть количество нулевых остатков в столбце под номером j а $L_m(j)$ - количество ненулевых остатков в этом же столбце. Но т.к. k_1 и k_2 показывают количество зачеркнутых столбцов в матрицах, следовательно

$$|k_1 - k_2| \leq \nu(n) + \pi(n) + 2[\log_2 n].$$

Следствие 24.3 *Имеет место соотношение*

$$[\log_2 n] - \left\lceil \frac{\nu(2n)}{2} \right\rceil - 1 \leq \pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \leq [\log_2 n] + \left\lceil \frac{\nu(2n)}{2} \right\rceil + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}((n-1)^2 + 1)$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, которые имеют минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$, и сопоставляя матрицы по максимальному количеству нулевых остатков, придем к выводу, что теорема не вызывает сомнений. Потому что матрицы, имея равное количество столбцов, отличаются количеством четных и нечетных столбцов.

Теорема 24.4 *В матрице $M_{m,n}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$; $n < \lambda < n^2$ и $(n, \lambda) = \nu(n)$ имеется как минимум*

$$\left\lceil \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rceil - 1$$

столбцов, каждый из которых соответствует простому числу.

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(\lambda)$, где $n < \lambda < n^2$, $(n, \lambda) = \nu(n)$.

1) В матрице $M_{m,n}(1)$ зачеркнем все те столбцы, в каждом из которых имеется минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_1^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_1 , тогда имеем

$$k_1^* = [\log_2 n] + 1, \quad k_1 = n - k_1^* = n - [\log_2 n] - 1.$$

2) В матрице $M_{m,n}(\lambda)$ зачеркнем все те столбцы, каждый из которых соответствует составному числу. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 , тогда имеем

$$k_2 = n - k_2^*.$$

Так как

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1) = c(m, n, \lambda),$$

следовательно,

$$\overline{M}_{m,n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}^{k_1}(1) = c_*(m, n, \lambda) + [\log_2 n] - 1.$$

Это следует из того, что среди k_1 столбцов не фигурируют столбцы, которые соответствуют числам вида 2^r , где r - натуральное число ($1 \leq r \leq [\log_2 n]$), и при $n > 4$, $c_*(m, n, \lambda) > 1$.

Расставляя столбцы матриц по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим Теорему 24.4. В противном случае получим, что матрицы $M_{m,n}(\lambda)$ и $M_{m,n}(1)$ имеют разное количество столбцов.

Следствие 24.4 *Количество простых столбцов в матрице $M_{m,n}(\lambda)$, где $n^2 > \lambda > n$, не меньше, чем*

$$\left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - 1.$$

Доказательство следствия аналогично доказательству теоремы.

Следствие 24.5 *В матрице, которая составлена из чисел $-(n-1), -(n-2), \dots, -2, -1, 0_n$, и которую можно символически записать в виде $M_{m,n}(-(n-1))$, где $m = \pi(n)$, имеется не менее $\left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - 1$ столбцов, в каждом из которых нет ни одного нулевого остатка в строках $1 \leq i \leq m = \pi(n)$.*

Доказательство. Так как по Теореме 24.4 каждая из матриц $M_{m,n}(n^2)$ и $M_{m,n}(n(n-1))$ содержат не менее чем $\left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - 1$ столбцов, каждый из которых соответствует простому числу, то следствие не вызывает сомнений.

Теорема 24.5 *Имеют место соотношения:*

$$a) \pi(N) \geq (\pi(n_1))^2 - [\log_2 n_1] - 1,$$

$$b) \pi(N) \leq (\pi(n_2))^2 + [\log_2 n_2] + 1,$$

где $n_1 = [N^{1/3}]$, $n_2 = [\sqrt{N}]$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,N}(1)$, где $m = \pi([N/2])$, расширим ее так, чтобы ее ширина стала $m_* = m + m^*$, где $m = \pi([N/2])$, $m^* = \pi([\sqrt{N}])$. Расширенную матрицу обозначим $M_{m_*,N}(1)$ и представим ее в виде

$$M_{m_*,n}(1) = N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m,\lambda}(2|2) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1),$$

где $\lambda = [N/2]$.

1) В матрице $N_{m,\lambda}(2 \nmid 1)$ зачеркнем все те столбцы, которые соответствуют составным числам. Количество незачеркнутых столбцов в этой матрице обозначим k_1^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_1 , тогда имеем

$$k_1^* = \pi(N); \quad k_1 = \lambda - \pi(N).$$

2) В матрице $N_{m,\lambda}(2|2)$ зачеркнем все те столбцы, каждый из которых не соответствует числам вида $2p_k$, где $2 \leq p_k \leq \lambda$. Количество незачеркнутых столбцов этой матрице обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 , тогда имеем

$$k_2^* = \pi(\lambda); \quad k_2 = \lambda - k_2^*.$$

Расставляя столбцы матриц $N_{m,\lambda}(2 \nmid 1)$ и $N_{m,\lambda}(2|2)$ по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим пункт а) Теоремы 24.5.

В матрицах $M_{m,\lambda}(1)$ и $M_{m,\lambda}(\lambda+1)$ зачеркнем все те столбцы, которые соответствуют составным числам, кроме тех, которые вида 2^r , $r > 1$. Рассуждая так же, получим доказательство пункта б) Теоремы 24.5.

Следствие 24.6 *Имеет место соотношение*

$$\pi(4n) - \pi(3n) = \pi((4n)^{1/3}) - \pi((4n)^{1/4}).$$

Доказательство следствия тривиально вытекает из доказательства теоремы.

Определение 24.3 *Если количество столбцов в матрице остатков равно простому числу, то такая матрица называется простой матрицей.*

В следствии 15.4, с помощью простых матриц $M_{m*,p}(1)$, где p простое число получены формулы $\pi(kp) = k\pi^*(p) - 1$ и $\pi(kp) = (k-1)\pi^*(p) + [\log_2 p]$, где $1 \leq k \leq p$, $\pi^*(n)$ – количество нечетных простых чисел. Если аналогичные формулы получить для матриц $M_{m*,p^2}(1)$, $M_{m*,p^3}(1), \dots, M_{m*,p^p}$ и для матриц $M_{m*,2^p}(1)$, $M_{m*,2^{2p}}(1), \dots, M_{m*,\lambda}(1)$, где $\lambda = (2^p)^p$, то проблема криптографии будет решена полностью.

Таким образом, можно сказать, что теория матриц остатков (матричная математика) сводит числовую ось к распаду, т.е. числовые проблемы, которые существуют на больших интервалах целых чисел, решаются с помощью проблем которые возникают на малых интервалах числовой оси, независимо от того, где и на каком участке числовой оси находятся эти интервалы, а также от типа простых чисел, т.е. эти простые числа вида $4x - 1$ или $4x + 1$.

Так как количество простых чисел зависит от направления их расчета, т.е. относительно среднего столбца матрицы они могут стать и ненулевыми остатками, поэтому простые числа 2, 3 и 5 получают главную роль в процессе образования других простых чисел относительно натурального нуля (где $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$) в ту или другую сторону.

Теория матриц остатков старается найти закономерности распределения простых матриц и, следовательно, закономерности распределения простых, взаимoprостых и простообразных чисел (столбцов) на числовой оси.

Глава 25

Простообразные числа и комбинаторика

Определение 25.1 В матрице остатков $M_{m,2n}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, столбец, который имеет только один нулевой остаток или не имеет нулевых остатков, называется простообразным столбцом данной матрицы.

Определение 25.2 Число вида p_i^n , где p_i - простое число, а n - натуральное число, называется простообразным числом.

Из определения следует, что если $p_i \geq 3$, то p_i^n называется нечетным простообразным числом, а если $p_i = 2$, то 2^n называется четным простообразным.

Теорема 25.1 Главный фокус любой матрицы соответствует простообразному числу.

Доказательство. Так как средний столбец матрицы показывает среднее арифметическое чисел, которые соответствуют крайним столбцам данной матрицы, то для числа a , такого, что $1 < a < p_i^n$ выполняются соотношения

- 1) При $(p_i^n, a) = 1$, где a - натуральное число, получаем $(p_i^n - a, p_i^n, p_i^n + a) = 1$.
- 2) При $(p_i^n, a) \neq 1$ получаем $(p_i^{n_1} - a_1, p_i^n, p_i^{n_1} + a_1) = 1$. Здесь $a_1 < a$, $(a, a_1) = 1$ - произвольное натуральное число, $n_1 < n$ тоже произвольное натуральное число.

Теорема 25.1 доказана.

Следствие 25.1 Количество ненулевых остатков в простообразных столбцах данной матрицы, или равны, или отличаются на единицу.

Доказательство. По условию следствия необходимо доказать, что

$$|L_m(j_1) - L_m(j_2)| = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Здесь $L_m(j)$ - количество ненулевых остатков в столбце под номером j .

На самом деле нетрудно убедиться, что

$$|L_m(j_1) - L_m(j_2)| = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ if } (j_1, j_2) = 1, \text{ if } j_1 < n_j < j_2 \\ 0 \text{ if } 2|j_1, 2|j_2, \text{ if } j_1 < n_j < j_2 \end{array} \right\}.$$

Если $m = \pi(n)$.

Здесь n_j - обозначение j -го столбца.

Следствие 25.2 Если λ_a и λ_b соответствуют крайним столбцам матрицы, а λ_c ее среднему столбцу, то

$$(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) = 1$$

тогда и только тогда, когда одно из чисел $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ являются простообразным числом, а если хоть один из столбцов, соответствующих этим числам, содержит как минимум 2 нулевых остатка в строках $1 < i < t = \pi(n)$, то как минимум один из этих простых делителей становится и делителем двух других чисел.

Доказательство следствия вытекает из определения фокуса матрицы.

Теорема 25.2 Если число $2^{2p} + 1$ не кратно 5, то оно простое число.

Доказательство. Рассмотрим числа $2^{2p}-1, 2^{2p}, 2^{2p}+1$. Число $2^{2p}-1$ кратно 3, потому что число 2^p+1 кратно 3 и 2^p-2 тоже кратно 3. Но так как число 2^{2p-1} есть главный фокус (средний столбец) матриц

$$M_{m,2^{2p}+1}(1), M_{m,2^{2p}-2}(2), M_{m,2^{2p}-4}(4),$$

потому что $2 \cdot 2^{2p-1} = 2^{2p}$. Следовательно, если окажется, что число $2^{2p}-1$ кратно 15, то тогда получим, что число $2^{2p}+1$ не может быть кратным какому-то простому числу p_k , где $5 \leq p_k < 2^{2p}-1$. Следовательно, число $2^{2p}+1 = p_k^*$ - простое число. Теорема 25.2 доказана.

Примечание. Понятие простообразных столбцов (чисел) в матрицах остатков позволяет распространить методы комбинаторики на числовую ось, и понять не только смысл числа на числовой оси, но и сущность математических операций (действий) с этими числами, в зависимости от направления и отрезка числовой оси, где происходят эти операции.

Существование простообразных чисел показывает, что главными фокусами данной числовой оси являются точки, которые называем числом 1 и 2. Потому что простообразные числа есть различные разновидности этих чисел. Отмечая начало числовой оси, мы фактически задаем все те точки, которые называем числами, и которые находятся с правой, или с левой стороны от этого начала.

Истинная сущность любого числа N на числовой оси определяется соотношением

$$L_m(N) + \nu(N) = \pi(n),$$

где $n = [\log_2 N]$, которое определяет место числа на числовой оси и утверждает, что каждое число имеет свое определенное место на числовой оси, которое невозможно перепутать с местом другого числа. Поэтому нужно стараться точно определить не только $\pi(N)$, но и $\nu(N)$.

В существующей математике не часто используется величина $L_m(N)$. На языке матриц она означает количество ненулевых остатков столбца (числа) N , т.е.

$$L_m(N) = \pi(0_n) - \nu(N), \quad n = [\log_2 N]$$

показывает, что начиная движение от точки 0_n (натуральный ноль) с длиной шага p_i (простое число, делитель n и N) через определенное количество шагов наступим на точку (число) N , при этом наступая и на точку n . Но двигаясь от точки 0_n с длиной шага p_k , где p_k - простое число, такое что $2 \leq p_k \leq [N/2]$ и $(p_i, p_k) = 1$, никогда не наступим на точку n , если даже начнем движение с такой же длиной шага от точки N в обратном направлении.

Принимая число 0 (ноль) кратным всем целым числам, получаем, что функция $\pi(N)$ стремится к бесконечности, и $\nu(N)$ стремится к бесконечности, которые ничего существенного не привносят в математику, кроме неясностей.

Так как наша математика десятиричная и $\pi(10) = [\log_2 10] = 3$, поэтому простые числа 2, 3, 5 имеют большое значение, особенно тогда, когда главными фокусами матриц остатков являются столбцы, которые соответствуют числам $2^n, 3^n, 5^n$.

Игнорируя величину $L_m(N)$, приходим к формулам

$$\nu(N) + \nu(N + 1) = \nu(N(N + 1)),$$

или

$$\nu(N) - \nu(N - 1) = \nu\left(\frac{\nu(N)}{\nu(N - 1)}\right); ?!$$

Получаем неопределенности, которые не могут выяснить процесс числообразования на числовой оси, и поэтому простообразные числа иногда становятся или отрицательными, или иррациональными, или мнимыми, в зависимости от того, в каких промежутках чисел они находятся.

В матричной математике величины $\pi(N)$ и $\nu(N)$ имеют конкретные значения, поэтому величины $\pi(N) + \nu(N)$ и $\pi(N) - \nu(N)$ также имеют конкретные значения, которые определяются только с помощью масштаба данной числовой оси. Игнорируя прерывистость числовой оси, мы сами создаем дополнительные трудности на числовой оси, которые становится невозможно преодолеть.

Что касается комбинаторики, то если сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n , следовательно $2^{n-1} + 1$ соответствует не только среднему столбцу (главному фокусу) матрицы $M_{m, 2^n+1}(1)$, но и среднему столбцу матрицы $M_{m, 2^n-2}(2)$. Поэтому при $n = p$ крайние столбцы этой матрицы соответствуют простообразным числам, а в остальных случаях крайним столбцам (побочные фокусы) этих матриц соответствуют взаимно простые числа. Потому что все составные числа на числовом отрезке $[1, 2n + 1]$ можно представить с помощью различных комбинаций простых чисел $\pi(n)$, учитывая и число 1, как главный фокус числовой оси.

Известное соотношение $C_m^{m-n} = C_m^n$, которое является основой комбинаторики, для каждого столбца под номером N_i , где $n < N_i \leq N$, для матрицы $M_{m, N}(1)$, где $m = \pi(n)$, $n = [\log_2 N]$ принимает вид

$$\pi(n) = L_m(n) + \nu(n).$$

С помощью этой формулы определяется не только функция $\pi(N)$, но и $\nu(N)$. Потому что матрицы $M_{m, p}(1)$ и $M_{m, p}(p^p)$, где $m = \pi(p)$ подобные, и в матрице $M_{m, p}(p^p)$ только

$$\left[\frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right] - 1$$

столбцов могут соответствовать простым числам, т.е. не имеют простых делителей $< p^{p-1}$. Учитывая, что количество четных столбцов матрицы $M_{m, p}(p^p)$ на единицу меньше, чем количество нечетных столбцов этой же матрицы, и рассматривая матрицы $M_{m_1, p^p}(1)$ и $M_{m_1, p^p}(p)$, где $m_1 = \pi(\sqrt{p^p})$, можем прийти к выводу, что в матрице $M_{m, p}(p^p)$ составным числам соответствуют $p - \left[\frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right] + 1$ столбцов, т.е. являются составными.

Аналогично можно доказать, что

- 1) если числа $2^p - 1$ и $2^{2p} + 1$ не кратны 5, то они - простые числа;
- 2) установить, при каких значениях числа p числа $2^p - 1$ и $2^p + 1$ составные;

3) установить, какие простые числа могут быть и простыми числами Мерсена или Ферма, и т.д.

После такого разбора числовой оси проясняются и вопросы, связанные с количеством решений уравнений, они тоже решаются с помощью матриц остатков.

Если на числовой оси задано число N , то цель теории чисел сводится к определению функций $\pi(n)$ и $\nu(n)$, потому что $n = [\log_2 N]$. Для подтверждения этого факта рассмотрим матрицу $M_{m,n^n}(1)$, где $m = \pi(n)$. Обращая внимание на столбцы данной матрицы под номером n и n^n заметим, что n^n столбец имеет нулевые остатки в тех же строках, в которых имеет нулевые остатки n -й столбец. Это подтверждается тем, что если простое число p_i является делителем числа (столбца) n , то двигаясь от точки (столбца) n с длиной шага p_i через некоторое определенное время мы наступим на точку (число, столбец) n^n и на точку (число, столбец) 0_n (натуральный ноль). Следовательно, расстояние от числа 0_n (натурального нуля) до n^n можно привести к размерности p_i и n , т.е. количество столбцов в отрезке от 0_n до n^n можно разделить не только на p_i равных частей, но и на n равных частей. С другой стороны мы можем получить, что с длиной шага p_k , где $(p_k, p_i) = 1$, начиная движение от точки n с длиной шага p_k , мы не сможем попасть ни в точку n^n , ни в точку 0_n , потому что количество столбцов матрицы $M_{m,n}(0_n)$ равно $n + 1$, а натуральный ноль $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, где $m = \pi(n)$. Такой подход к числовой оси приводит нас к тому, что количество простых столбцов матрицы $M_{m,n}(n^n + 1)$ можно определить с помощью $\pi(n)$ или $[\log_2 n]$. Аналогично и количество столбцов, не имеющих нулевых остатков матрицы $M_{m,n}(-0_n)$, или матрицы $M_{m,n}(-(n + 1))$, которые составлены из чисел $-(n + 1), -n, -(n - 1) \dots, -2, -1, 0_n$ можно определить с помощью $\pi(n)$ или $[\log_2 n]$. Так как количество столбцов матрицы $M_{m,n^n}(-(n + 1))$ и матрицы $M_{m,n^n}(n + 1)$ тоже равно n^n . Следовательно, если $n = p$ - простое число, то задача определения функций $\pi(N)$ и $\nu(N)$ сводится к определению функций $\pi(n)$ и $\nu(n)$. Формула $\nu(N) + \nu(N + 1)$, которая почти ничего не говорит про число N , в матрицах остатков оживает и принимает вид

$$|\nu(n) - \nu(n + 1)| = |L_m(n) - L_m(n + 1)| = |\nu(N) - \nu(N + n)| = |L_m(N) - L_m(N + n)| \geq 0,$$

где $n = [\log_2 N]$.

Ясно, что для решения какой-то задачи, которая возникает на практике, сначала ее формулируют в виде некоторого уравнения (системы уравнений), а потом стараются решить это уравнение. В этом смысле решение любого уравнения сводится к решению некоторой численной задачи с определенным количеством чисел на определенных участках числовой оси. Но если определение функций $\pi(N)$ и $\nu(N)$ сводится к определению функций $\pi(n)$ и $\nu(n)$, где $n = [\log_2 N]$, следовательно определения функций $\pi(n)$ и $\nu(n)$ можно свести к определению простообразных столбцов матрицы $M_{m,2n+1}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$. Величина $|\lambda|$ показывает расстояние числа λ_1 от числа 0_n , и расстояние числа λ_2 от числа 0_n , если $\lambda_1 + \lambda_2 = N$, а $0_N = \prod_{i=1}^{m_*} p_i$, где $m_* = \pi(\sqrt{N})$, $n|N$. В этом смысле если степень уравнения равна n , то количество решений такого уравнения равно не только n , но и $\nu(n + 1)$. Потому что начиная движение от точки λ_1 с длиной шага 1 (масштаб данной числовой оси) мы тоже через определенное количество шагов наступим на точку (число) 0_N и на точку λ_2 .

При таком подходе к числовым задачам, которые возникают из уравнений, с помощью формулы

$$|\nu(n) - \nu(2n + 1)| = |L_m(n) - L_m(2n + 1)| \geq 1,$$

можно понять причину того, что одно и то же уравнение может иметь и рациональные

и иррациональные, или и действительные и мнимые решения. Потому что не только длина шагов, но и количество шагов и другие параметры характеризуют уравнение.

Дело в том, что если известно, что число N кратно p_i , то сразу возникает вопрос, а какое число N_1 можно умножить на p_i , чтобы получить N ? Поэтому простообразные числа на числовой оси играют особую роль, и выясняют, что любое уравнение (и система уравнений) имеют решение, учитывая, что и иррациональные и мнимые решения в конечном счете равны расстоянию данного числа (точнее данной точки) от начала данной числовой оси, которое называем нулевой точкой в зависимости от того, на каком участке (отрицательном, или положительном) находится эта точка, или число.

Обобщая свойства матриц остатков, мы можем сказать, что матричная математика не оставляет белых пятен на числовой оси, и все проблемы, возникающие при числовых операциях (действиях) с числами решаются рекуррентными формулами.

Глава 26

Заключение

Матричная математика, или матричный метод старается согласовать математику на числовой оси с математикой, которая образуется в нашем сознании. Этот процесс согласования означает осмыслить сущность числообразования на числовой оси, которое связано с огромными трудностями из-за выбора начала отсчета (начало числовой оси).

Так как число n на числовой оси показывает количество единичных отрезков, плотно расставленных вдоль одной виртуальной прямой по двум направлениям, следовательно, число n есть не та точка, которую символически обозначаем n , а есть сумма n единичных отрезков. Такой подход к числам на числовой оси приводит к относительности понятия четности на числовой оси. Потому что $2n$ последовательных чисел на числовой оси показывают, что среди них есть n четных и n нечетных чисел, следовательно четность числа, или точнее, **четность** символа данного числа зависит от выбора точки отсчета.

На числовой оси нет абстрактных (безразмерных) чисел, каждое из них показывает отрезок, или сумму отрезков, которые имеют длину, которая зависит от того, с какого конца мы их измеряем, или на каком участке числовой оси расположены эти отрезки.

Чтобы суметь разобраться в сущности числообразования на числовой оси, создали матрицы остатков, которые подсказывают, что на данной числовой оси существуют только целые числа, которые могут быть составными или простыми, в зависимости от выбора начала числовой оси.

С помощью матриц остатков свойства чисел можно изучать не только вдоль одной прямой, но и по вертикали.

В матрице остатков $M_{m,2n}(1)$, где $m = \pi(n)$, числа на отрезке $[1, 2n]$ при их очередном делении на простые числа p_i , где $2 \leq p_i \leq n$, превращаются в остатки, которые распределены по строкам p_i и по столбцам q_j . В каждом столбце такой матрицы имеются нулевые и ненулевые остатки, которые определяются формулами:

$$\text{для столбцов } L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n),$$

$$\text{для строк } (\overline{N}_{m,n}(2 \nmid 1) - \overline{N}_{m,n}(2|2)) = c(m, n, 2 \nmid 1),$$

где j - порядковый номер j -го столбца.

С помощью этих формул определяем величину

$$\pi(2n) - \pi(n),$$

и аналогично разность

$$\pi((2n)^2) - \pi(n^2)$$

при любом значении n , пользуясь тем, что в матрицах остатков имеем более сложное строение числовой оси, чем ее представляем. С помощью матриц остатков числовая ось представляется как сумма параллельных (по аксиомам Эвклида) прямых, у которых начала отсчета перемещены по отношению друг к другу на определенное количество отрезков единичной длины (масштаб числовой оси). Поэтому имеем

$$n = [\log_2 N], \quad n = [\log_n n^n].$$

Так как наша математика десятиричная, то простые числа 2,3,5 играют основополагающую роль в процессе числообразования. На числовой оси появляются простообразные числа, четные из которых считаются потенциально простыми числами, и получаем относительность понятия простых и составных чисел, в зависимости от начала отсчета четных и нечетных чисел. Используя формулы:

$$n_1 = [\log_2 N], \quad n_2 = [\log_3 N], \quad n_3 = [\log_4 N], \quad n_4 = [\log_5 N],$$

получаем соотношение

$$L_m(N) = L_m(N_1) - \nu(\nu(n_1) + \nu(n_2) + \nu(n_3) + \nu(n_4)),$$

где $N_1 = [N/2]$.

С помощью этих формул величины $L_m(N)$ и $\nu(N)$ сводим к величинам $L_m(n)$ и $\nu(n)$, где $n = [\log_2 N]$, и решаем не только чисто теоретические, но и практические задачи, сводя их к уравнениям или системам уравнений.

Обобщая теорию матриц остатков, получаем

Теорема 26.1 *Сумма количеств остатков в матрице $M_{m,2n}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, λ -целое число, есть постоянная величина, которая равна $2n \cdot \pi(n)$.*

Доказательство. Так как для каждого j -го столбца данной матрицы имеем

$$L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n),$$

где $L_m(j)$ есть количество ненулевых, а $\nu_m(j)$ количество нулевых остатков столбца под номером j , то теорема не вызывает сомнений.

Эту теорему можно считать главной теоремой числовой оси. Все теоремы, которые доказаны в этом сборнике, являются следствием этой теоремы.

По отношению к уравнениям мы можем сказать, что теория матриц остатков превращает любое уравнение в тождество на числовой оси. Потому что числообразование чисел на числовой оси происходит с одинаковой закономерностью, не зависимо от того, на каком участке числовой оси происходит числообразование. Закономерности числообразования создают элементарные математические действия: сложение (вычитание), умножение (деление), извлечение корня (логарифмирование). Поэтому на числовой оси нужно более глубоко изучать процесс числообразования, понять все оттенки числовых операций. Как например, уравнение $\sqrt{a^2} = \pm a$ должно интересовать не только результатом $\pm a$, но и тем, что это равенство показывает, что:

1) Среди последовательных чисел от 1 до a^2 на числовой оси имеется только a чисел, каждое из которых кратно a .

2) Имеет место соотношение

$$\pi(a^2) + E(a^2) = a^2,$$

где функция $E(a^2)$ показывает количество составных чисел, которые находятся среди чисел $[1, a^2]$.

3) Имеет место соотношение

$$\pi(a^2) = \pi(a^*) + \pi_*(a),$$

где $\pi_*(\alpha)$ есть количество простых чисел на отрезке $[a + 1, a^2]$. И так далее.

Возникают вопросы:

1. Как выразить величину $\pi(a^2)$ через $\pi(a)$?
2. Как выразить величину $\pi(a^2)$ через $[\log_2 a]$? И так далее.

Существующая математика часто пренебрегает не только пунктами 1), 2), 3), но и вопросами 1. и 2. В результате возникают уравнения типа уравнения Серпинского-Эрдеша

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

которое невозможно решить в общем виде, из-за того, что невозможно найти функциональные зависимости чисел x, y, z и n , и чисел $1, 4, n$.

Потому что при сложении (вычитании) дробей всегда находим общий знаменатель, но никогда не вникаем в сущность этого общего знаменателя на числовой оси.

В матричной математике эти зависимости определяются с помощью логарифмирования числа N по основанию n , или по основаниям $2, 3, 4, 5$, или с помощью корней $N^{1/2}, N^{1/3}, N^{1/4}, N^{1/5}$, учитывая целые части полученных результатов, потому что формула

$$L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n)$$

справедлива для j -го столбца матрицы $M_{m,2n}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, n - целое число, и $10 < n < n^2$.

Поэтому уравнения, которые невозможно решить с помощью существующей математики, решаются с помощью матричной математики.

Теорема 26.2 Для каждого натурального числа $n > 1$ существуют натуральные числа x, y, z такие, что справедливо соотношение

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \quad (26.1)$$

Доказательство. Упрощая выражение (26.1) и принимая

$$4xyz = n(xy + xz + yz) = 4N,$$

где N кратно n , получим числовой отрезок $[1, 4N]$. Применяя метод решета, т.е. оставляя простое число p_i нетронутым, зачеркиваем все те числа этого отрезка, которые кратны p_i , где $2 \leq p_i \leq \pi(\sqrt{4N})$. Ясно, что

$$[0, 4N] = [0, 2N] + [2N, 4N] + [4N, 6N] + [6N, 8N].$$

Обозначая количество составных чисел отрезка $2N_i$ через $E(2N_i)$, получим соотношение

$$\pi(2N_i) + E(2N_i) = 2N_i,$$

и следовательно,

$$4N = \sum_{i=1}^4 \pi(2N_i) + \sum_{i=1}^4 E(2N_i) = \pi(4N) + E(4N). \quad (26.2)$$

Уравнение (26.2) содержит два неизвестных $\pi(2N_i)$ и $E(2N_i)$, а число N является известным (заранее заданным). Следующее уравнение с этими же неизвестными получим, разделив отрезок $[1, 4N]$ на три части.

$$[1, 4N] = [1, 3N] + [3N, 6N] + [6N, 9N].$$

Аналогично получим уравнение

$$4N = \sum_{i=1}^3 \pi(2N_i^*) + \sum_{i=1}^3 E(2N_i^*) = \pi(4N) + E(4N). \quad (26.3)$$

Уравнение (26.3) и уравнение (26.2) образуют систему из двух уравнений с двумя неизвестными, потому что

$$\left[\frac{\pi(4N_i)}{\pi(3N_i)} \right] = \left[\frac{E(4N_i)}{E(3N_i)} \right] = \left[\frac{\pi(3N_i)}{\pi(2N_i)} \right] = \left[\frac{E(3N_i)}{E(2N_i)} \right]. \quad (26.4)$$

Обозначая

$$[\pi(3N_1^*)] = x_0, \quad [\pi(3N_2^*)] = y_0, \quad [\pi(3N_3^*)] = z_0,$$

получим решение уравнения (26.1).

Другой набор решений имеет вид

$$[E(3N_1^*)] = x_1, \quad [E(3N_2^*)] = y_1, \quad [E(3N_3^*)] = z_1.$$

Конечно, уравнение (26.1) решено в области существующей математики с применением метода решета. Но нас привел к этому метод матриц остатков, потому что натуральные числа на числовой оси есть не что иное, а остатки, которые получены при делении больших чисел на малые.

Аналогично можно решить и уравнение вида

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad (26.5)$$

или любое уравнение такого типа, потому что и соотношение (26.5) можно привести к системе уравнений

$$\pi(kn) - \pi(n - k) = x_0, \quad E(kn) - E(n - k) = x_1,$$

$$\pi(k + n) - \pi(n) = y_0, \quad E(n + k) - E(n) = y_1,$$

где k, n, x, y, x_1, y_1 – натуральные числа, и $1 < k \leq n$.

Матричная математика привел нас к тому, что теорема Фалеса не точна, потому что является следствием основной аксиомы существующей математики (число „НОЛЬ“ кратно всем целым числам), которая приводит результаты математических операций к приближительным значениям. Эти незначительные неточности приводят к проблемам не только в операциях с целыми числами, но и с дробными, или, точнее, во всех разделах математики.

Что касается теоремы Фалеса, то матричная математика подсказывает, что отрезок с длиной N можно разделить максимум на $N - 1$ равных частей. Уточненная теорема Фалеса стала решающим фактором для понимания процесса числообразования и истиной сущности уравнений на числовой оси.

Задача определения количества простых и составных чисел на числовом отрезке $[\lambda, \lambda + n]$ есть главная задача теории чисел. Поэтому любую задачу (уравнение) на

числовой оси можно свести к нахождению величин $\pi(n)$, $\nu(n)$, $E(n)$, $[\log_2 n]$ при данном значении n и определению зависимости этих величин от n , и их связям друг с другом.

При увеличении значения n эти вопросы становятся проблематичными.

Известно, что любой отрезок $[\lambda, \lambda + n]$ на данной числовой оси содержит $n + 1$ точек, которые отмечены, как числа. Исходя из этого существующая математика сводит задачу нахождения величин $\pi(n)$, $\nu(n)$, $E(n)$, $[\log_2 n]$ на произвольном отрезке $[\lambda, \lambda + n]$ к задаче нахождения этих величин на отрезке $[0, n]$. Поэтому мы получаем приблизительные оценки. Как например,

$$\pi(n^2) - \pi(n(n-1)) \neq \pi(n).$$

Чтобы убедить нас в своей правоте существующая математика использует методы дифференциального и интегрального исчисления, которые позволяют свести производные n -й степени к производной степени $n - 1$. И, в конечном счете, к производной степени 3 или 2. Но известно, какие трудности встречаются при решении дифференциальных и интегральных уравнений.

Матричная математика считает, что любой числовой отрезок с длиной $4N$ можно разделить на две части с длиной каждого $2N$, или на четыре части с длиной каждого N . Это равносильно тому, что биквадратное уравнение сводим к квадратному. Не забывая о том, что все четные числа на числовой оси, кроме 2, составные, следовательно, отрезок чисел с длиной $4N$ содержит $2N$ четных $2N$ нечетных чисел. Поэтому отрезок чисел $4N$ можно разделить и на три части.

Именно так получены уравнения (26.2), (26.3), и их можно назвать квадратными, или кубическими. Потому что число вида $4xyz$ всегда можно рассмотреть, как числа $2a^2$ или $2b^3$, где a и b - целые части от радикалов $\sqrt{4xyz}$ и $(xyz)^{1/3}$.

Консервативные математики не согласны с тем, что уравнения (26.2) и (26.3) содержат только два неизвестных, хотя охотно соглашаются с дифференциальным и интегральным исчислением. Возможно, они забыли, как получили и оценили решения тригонометрических уравнений на числовой оси.

Матричная математика другого мнения. Потому что разделение отрезка $[\lambda, \lambda + 4xyz]$ на числовой оси равносильно разделению функции $f(x, y, z) = 4xyz$ на функции $f_1(x) = x^2$, $f_2(y) = y^3$, $f_3(z) = z^4$.

Так как на числовой оси понятие числа, а следовательно простого и составного числа, есть понятие относительное, и показывают точки, которые находятся на определенном расстоянии от точки, которую мы принимаем за начало данной числовой оси.

Следовательно, уравнение (26.1) можно свести к биквадратному, кубическому или квадратному уравнению.

Уравнения (26.1) или (26.5) тоже имеют определенное количество решений, и эти решения можно привести к двум, или трем натуральным числам, потому что решения любого уравнения любой степени показывает расстояние соответствующей точки от начала данной числовой оси (количество единичных отрезков), которое может быть только натуральным числом.

На языке матриц остатков теорема 26.2 (уравнения (26.1) и (26.5) тривиальна, потому что любой числовой отрезок длиной больше или равной 30 можно разделить на три части (равные, или неравные). На каждом из этих отрезков количество простых чисел выражаются натуральными числами.

Удивительно еще то, что консервативные математики соглашаются с тем, что линейное уравнение имеет одно решение. Ведь при решении линейного уравнения полу-

чаем целые, дробные, иррациональные, даже трансцендентные ($\pi \approx 3.14..$) и неопределенные результаты. Как их объединяют и называют одним решением?

Кстати, уточнение теоремы Фалеса заметил Ферма, и применил его в своих работах, называя такой подход “методом бесконечного спуска”. Галуа тоже этим способом доказал теорему о количестве решений уравнений любой степени, и если бы не погиб трагически, то пришел бы к идеям матричной математики, потому что понятие остатков носилось в воздухе со времен Архимеда.

Подводя итог, отметим, что все расчеты, которые мы делали при доказательстве теорем этого сборника, не везде безукоризненно точны, потому что мы старались подчеркнуть преимущество метода матричной математики, не обращая должное внимание на технику расчета. Ибо если при сложении многозначных чисел ученик допускает ошибку, это не означает, что метод сложения многозначных чисел неверен.

Москва, 2017.

Глава 27

Истинная сущность натурального нуля (O_n) и функции $c(m, n, n + 1)$

*“... чтобы узнать качество вина целой бочки
не обязательно его выпить до дна...”*

27.1 Введение

Матричная математика (теория матриц остатков) показывает, что все проблемы числообразования отрезка чисел $[\lambda, \lambda + 2n]$ числовой оси с помощью матриц остатков можно свести к решению числовой задачи на отрезке чисел $[0, 2n]$, где $\lambda \geq 2n$. Для этого нужно выяснить истинную сущность натурального нуля

$$0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n)$$

и функции $c(m, n, n + 1)$ т.е. какую роль они играют на данной числовой оси.

27.2 Расширение матриц. Функция $c(m, n, n + 1)$ в матрицах остатков

Рассмотрим матрицу остатков $M_{m,2n}(1)$, $m = \pi(n)$. Расширим ее, т.е. каждое число, соответствующее каждому столбцу этой матрицы, разделим еще на квадрат простого числа p_q^2 , где $2 \leq p_q \leq \pi(\sqrt{2(n+1)})$ и полученные остатки занесем в соответствующие столбцы этой матрицы. Ясно, что при расширении матрицы $M_{m,2n}(1)$ ее ширина увеличится и станет равной $i_* = i + i^*$. Следовательно, $m_* = m + m^*$, где $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n+1})$. А длина матрицы не изменится, т.е. останется равной $2n$. Общий вид расширенной матрицы обозначим $M_{m_*,2n}(1)$. Имеют место соотношения

$$\begin{aligned} M_{m_*,2n}(1) &= M_{m_*,n}(1) + M_{m_*,n}(n+1), \\ \overline{M}_{m_*,n}(n+1) - \overline{M}_{m_*,n}(1) &= c_*(m_*, n, n+1) = c(m, n, n+1) + c^*(m^*, n, n+1). \end{aligned}$$

Так как матрицы $M_{m_*,n}(n+1)$ и $M_{m_*,n}(1)$ имеют одинаковое количество столбцов, но при $2 \nmid n$ количество нечетных столбцов матрицы $M_{m_*,n}(1)$ на 1 больше числа четных столбцов матрицы $M_{m_*,n}(n+1)$, а количество четных наоборот. А при $2 \mid n$ у этих матриц количество четных и нечетных столбцов одинаково. Таким образом, имеем

$$c_*(m_*, n, n+1) \geq \begin{cases} -1, & \text{if } 2 \nmid n \\ 0, & \text{if } 2 \mid n \end{cases}. \quad (27.1)$$

Зачеркивая все те столбцы матрицы $M_{m_*,2n}(1)$ каждый из которых содержит минимум 2 нулевого остатка в строках $1 < i \leq m = \pi(n)$ и $1 < i \leq \pi(\sqrt{2(n+1)})$, определяем не только функцию $c_*(m_*, n, n+1)$, но и те столбцы этой матрицы каждый из которых соответствует простому числу и числу вида 2^s , $2 \leq 2^s \leq 2n$.

Теорема 27.1 *Имеет место соотношение*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq [\log_2 n] - 1, \quad \text{if } n \geq 2.$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*,2n}(1)$, где $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2(n+1)})$. Представим ее в виде

$$M_{m_*,2n}(1) = M_{m_*,n}(1) + M_{m_*,n}(n+1).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq n$ и $1 < i^* \leq m^*$, $p_q^2 \neq 2^2$.

1. В матрице $M_{m_*,n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = [\log_2 n] + 1$, а количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = n - k_1^*$.

2. В матрице $M_{m,n}(n+1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_2^* = \pi(2n) - \pi(n) + 1$, а количество зачеркнутых столбцов есть $k_2 = n - k_2^*$.

Потому что среди чисел $n+1, n+2, \dots, 2n$ есть только одно число вида 2^s , $n < 2^s \leq 2n$.

Предполагая, что $\pi(2n) - \pi(n) \geq 0$, и учитывая, что

$$\overline{M}_{m_*,n}(n+1) - \overline{M}_{m_*,n}(1) = c_*(m_*, n, n+1),$$

получим

$$\overline{M}_{m_*,n}^{k_2}(n+1) - \overline{M}_{m_*,n}^{k_1}(1) = c_*(m_*, n, n+1) + k_2 - k_1,$$

где $\overline{M}_{m_*,n}^{k_2}(n+1)$ и $\overline{M}_{m_*,n}^{k_1}(1)$ показывают количество нулевых остатков в зачеркнутых столбцах матриц $M_{m,n}(n+1)$ и $M_{m_*,n}(1)$.

Но так как в каждом столбце под номером n_j этих матриц есть $\pi(n) - \nu(n) = L_m(n_j)$ ненулевых остатков, следовательно,

$$\overline{\overline{M}}_{m_*,n}^{k_2^*}(n+1) - \overline{\overline{M}}_{m_*,n}^{k_1^*}(1) \geq [\log_2 n] - 1,$$

где $\overline{\overline{M}}_{m_*,n}^{k_2^*}(n+1)$ и $\overline{\overline{M}}_{m_*,n}^{k_1^*}(1)$ показывают количество ненулевых остатков в незачеркнутых столбцах (k_2^* и k_1^*) матриц $M_{m,n}(n+1)$ и $M_{m_*,n}(1)$.

Такой же ответ получим, если в матрицах $M_{m,n}(n+1)$ и $M_{m_*,n}(1)$ столбцы расставим так, чтобы с одной стороны располагались незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые. Сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов заметим, что в незачеркнутых столбцах матрицы $M_{m_*,n}(1)$ один столбец пуст, а в других столбцах имеется по одному нулевому остатку в строках $i = 1, i^* = 1$. А в незачеркнутых столбцах матрицы $M_{m,n}(n+1)$ только в одном столбце есть один нулевой остаток в строке $i = 1$, а остальные не содержат нулевых остатков (пустые). Так как количества столбцов в матрицах $M_{m,n}(n+1)$ и $M_{m_*,n}(1)$ равны между собой, и $c_*(m_*, n, n+1) \geq -1$, следовательно, теорема не вызывает сомнений.

Следствие 27.1 *Уравнение $\pi(2n) = 2\pi(n)$ имеет только два решения, $n_1 = 4, n_2 = 10$.*

Доказательство следствия вытекает из доказательства Теоремы 27.1. Так как наша математика десятиричная, и матрицу $M_{m_*, 2n}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*, 2n}(1) = N_{m_*, n}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, n}(2|2),$$

то заметим, что при $n > 5$ количество простых чисел (столбцов) в матрице $N_{m_*, n}(2 \uparrow 1)$ становится больше, чем $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Следствие 27.2 *Справедливо соотношение $\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lfloor \frac{\pi(n)-1}{4} \right\rfloor - 1$.*

Доказательство. В матрицах $M_{m, n}(1)$ и $M_{m_*, n}(n+1)$, где $m = \pi(n)$, $m_* = m + m^* = m + \pi(\sqrt{2n+1})$, зачеркнем все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i^* \leq m^*$. Теперь аналогично Теореме 27.1 получаем

$$\begin{aligned} k_1^* &= \pi(n) + 1, \quad k_1 = n - k_1^*, \\ k_2^* &= \pi(2n) - \pi(n), \quad k_2 = n - k_2^*. \end{aligned}$$

Если теперь сопоставим матрицы с зачеркнутыми и незачеркнутыми столбцами, то получим утверждение Следствия 27.2..

Замечание. Такой же результат мы получили бы, если представили матрицу $M_{m_*, 2n}(1)$ в виде

$$M_{m_*, 2n}(1) = N_{m_*, n}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, n}(2|2).$$

Теперь, зачеркивая все те столбцы матриц $N_{m_*, n}(2 \uparrow \lambda)$ и $N_{m_*, n}(2|\lambda)$, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i < m = \pi(n)$ и $1 \leq i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{2n+1})$, можно определить количество простых чисел на отрезке целых чисел $[\lambda, \lambda + 2n]$ при $(\lambda, n) = \nu(n)$, $\lambda \geq n$.

Теорема 27.2 *Имеют место соотношения*

$$\pi(2n^2) - \pi(n^2) = \pi(n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{4} \right\rfloor + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

$$\pi(2n^2) - \pi(n^2) = \pi(n^2) + \lfloor \log_2 n \rfloor + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*, 2n^2}(1)$, где $m = \pi(n^2)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n^2})$. Представим ее в виде

$$M_{m_*, 2n^2}(1) = M_{m_*, n^2}(1) + M_{m_*, n^2}(n^2 + 1) = N_{m_*, n^2}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, n^2}(2|2).$$

Зачеркнем все те столбцы в этих матрицах, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i < m = \pi(n^2)$ и $1 < i \leq \pi(\sqrt{2n^2})$.

1. В матрице $M_{m_*, n^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(n^2) + 2\lfloor \log_2 n \rfloor$, а количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = n^2 - k_1^*$.

2. В матрице $M_{m_*, n^2}(n^2 + 1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 .

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + 1, \quad k_2 = n^2 - \pi(2n^2) + \pi(n^2) - 1 - 2\lfloor \log_2 n \rfloor,$$

или

$$k_2 = n^2 - \pi(2n^2) + \pi(n^2) - 1 + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{4} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Потому что среди чисел $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, 2n^2$ есть только одно число вида 2^s .

Так как

$$\begin{aligned} & \overline{M}_{m_*, n^2}^{k_2}(n^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, n^2}^{k_1}(n^2 + 1) = \\ & = c_*(m_*, n^2, n^2 + 1) + \pi(n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{4} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \overline{M}_{m_*, n^2}^{k_2}(n^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, n^2}^{k_1}(n^2 + 1) = c_*(m_*, n^2, n^2 + 1) + \pi(n^2) + 2[\log_2 n] + \\ & + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем утверждение теоремы.

Следствие 27.3 *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned} \pi((2n)^2) &= 2\pi(2n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{2} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}, \\ \pi((2n^2)) &= 2\pi(2n^2) + [\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Рассматривая расширенную матрицу $M_{m_*, (2n)^2}(1)$ и представляя ее в виде

$$M_{m_*, (2n)^2}(1) = M_{m_*, 2n^2}(1) + M_{m_*, 2n^2}(n^2 + 1) = N_{m_*, 2n^2}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, 2n^2}(2|2),$$

и зачеркивая все те столбцы этих матриц, в каждом из которых имеется как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq m = \pi(2n^2)$, $1 < i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{4n^2})$, заметим, что

1. В матрице $M_{m_*, 2n^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_1^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_1 . Получим

$$\begin{aligned} k_1^* &= 2\pi(n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(n) - 1}{2} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}, \\ k_1 &= 2n^2 - \pi(2n^2) + \pi(n^2) + 2[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

2. В матрице $M_{m_*, 2n^2}(2n^2 + 1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим k_2^* , а количество зачеркнутых столбцов обозначим k_2 .

$$\begin{aligned} k_2^* &= \pi((2n)^2) - \pi(2n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{2} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}, \\ k_2 &= 2n^2 - \pi(2n^2) + 2[\log_2 2n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Сопоставляя столбцы матриц по зачеркнутым и незачеркнутым столбцам, получим Следствие. Потому что

$$c_*(m_*, 2n^2, 2n^2 + 1) = \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{2} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\},$$

или

$$c_*(m_*, 2n^2, 2n^2 + 1) = 2[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Глава 28

Квадратные матрицы остатков

Напомним, что матрица $M_{m,n^2}(\lambda)$ называется квадратной, если количество ее столбцов равно полному квадрату натурального числа.

Теорема 28.1 *Имеют место соотношения*

$$\begin{aligned}\pi(n^2) - \pi(n(n-1)) &\geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}, \\ \pi(n^2) - \pi(n(n-1)) &\geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - \nu(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},\end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*,n^2}(1)$, которую можно представить как сумму двух сдвинутых матриц

$$M_{m_*,n^2}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(n+1),$$

где $\lambda = (n(n-1))$, $m = \pi(n(n-1))$, $m_* = \pi(\sqrt{n^2}) = \pi(n)$.

Зачеркнем все те столбцы в этих матрицах, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq m = \pi(\lambda)$ и $1 < i \leq m^* = \pi(n)$. Учитывая, что матрицы $M_{m_*,\lambda}(1)$ и $M_{m_*,\lambda}(n+1)$ имеют общие столбцы, которые соответствуют числам $n+1, n+2, \dots, n(n-1)$, которые можно не учитывать, заметим, что

1. В матрице $M_{m_*,n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(n) + [\log_2 n]$, а количество зачеркнутых $k_1 = n - k_1^*$.

2. В матрице $M_{m_*,n}(\lambda+1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}$$

или

$$k_2^* \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - \nu(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}$$

Потому что, возможно, среди чисел $\lambda+1, \lambda+2, \dots, n^2$ есть одно число вида 2^s , $\lambda < 2^s < n^2$. Поэтому другие столбцы, соответствующие четным числам, зачеркнуты. Также зачеркнуты все нечетные столбцы, которые имеют хоть один ненулевой остаток в строках $1 < i \leq m = \pi(\lambda)$ и $1 < i \leq m^* = \pi(n)$. А это означает, что зачеркнуты и те столбцы этой матрицы, которые вида p_i^s , где $2 < p_i \leq n$, $\lambda < p_i^s \leq n^2$.

Количество зачеркнутых столбцов

$$k_2 \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - \nu(n)$$

или

$$k_2 \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - \nu(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}$$

Учитывая, что

$$c_*(m_*, n^2, n^2 + 1) = \left\lfloor \frac{\pi(n)}{4} \right\rfloor + 1,$$

и сопоставляя матрицы с зачеркнутыми и незачеркнутыми столбцами, получим Теорему 28.1.

Следствие 28.1 Среди $2n$ последовательных целых чисел, взятых из совокупности чисел $[n+1, n^2]$ есть как минимум $\left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - \nu(n)$ или $\left\lfloor \frac{\pi(n) - \nu(n)}{4} \right\rfloor - \nu(n)$ простых чисел.

Доказательство следствия тривиально вытекает из теоремы, если рассматриваем матрицы $M_{m_*, 2n}(1)$ и $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, где $n < \lambda \leq n^2$, с теми столбцами зачеркнутыми в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq m \leq \pi(\frac{n^2}{2})$ и $1 < i^* \leq m^* \leq \pi(n)$, и сопоставляем их с зачеркнутыми и незачеркнутыми столбцами.

Следствие 28.2 Имеют место соотношения

$$a) \quad \pi(n^2) - \pi(n(n-1)) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - 1,$$

$$b) \quad \pi(n^2 + 2n) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - 1}{4} \right\rfloor - 1.$$

Доказательство.

а) Рассмотрим расширенные матрицы $M_{m_*, n}(1)$ и $M_{m_*, n}(n^2+1)$, где $m = \pi(n^2)$, $m_* = \pi(n)$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m \leq \pi(n^2)$ и $1 < i^* \leq m^* \leq \pi(n)$.

1) В матрице $M_{m_*, n}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = [\log_2 n] + 1$, а количество зачеркнутых $k_1 = n - [\log_2 n] - 1$.

2) В матрице $M_{m_*, n}(n^2 + 1)$ количество незачеркнутых столбцов допустим $k_2^* = x$, а зачеркнутых $k_2 \geq n - x$. Предположим, что среди чисел $n^2 - n + 1, n^2 - n + 2, \dots, n^2$ возможно есть одно число вида 2^s .

Сопоставляя матрицы по зачеркнутым и незачеркнутым столбцами, получим следствие, или, точнее, пункт а).

$$\pi(n^2) - \pi(n(n-1)) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \\ 0, & \text{if } \nu(n) > 2 \end{cases},$$

потому что $\nu(n^2) = 1$ только при $n^2 = 2^s$.

б) Рассмотрим расширенные матрицы $M_{m_*, 2n}(1)$ и $M_{m_*, 2n}(n^2+1)$, где $m = \pi((2n-1)^2)$, $m_* = \pi(2n)$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, каждый из которых содержит как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m \leq \pi(n^2)$ и $1 < i^* \leq m^* \leq \pi(2n)$. Рассчитывая количество зачеркнутых и незачеркнутых столбцов в этих матрицах, получим

$$\pi(n^2 + 2n) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - 1}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Теорема 28.2 *Имеет место соотношение*

$$\pi(n^2) \geq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) + \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) \geq 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) = 1 \end{cases},$$

если $n \geq 5$.

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*, n^2}(1)$, где $n \geq 5$, $m = \pi\left(\frac{n^2}{2}\right)$, $m^* = \pi(n)$, $m_* = m + m^*$. Представим ее в виде

$$M_{m_*, n^2}(1) = M_{m_*, \lambda}(1) + M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1), \quad \lambda = \frac{n^2}{2}.$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq m$ и $1 < i^* \leq m^*$.

1. В матрице $M_{m_*, \lambda}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(\lambda) + 2\lfloor \log_2 n \rfloor - 1$, а количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = \lambda - \pi(\lambda) - \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Потому что число 1 не зачеркнуто, а число 2 одновременно и простое и вида 2^s .

2. В матрице $M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим $k_2^* = \pi(n^2) - \pi(\lambda) + 1$, потому что среди чисел $\lambda + 1, \lambda + 2, \dots, n^2$ есть только одно число вида 2^s .

А количество зачеркнутых столбцов в матрице $M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1)$ есть $k_2 \geq \lambda - \pi(n^2) + \pi(\lambda) + \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor - 1$.

Так как

$$\overline{M}_{m_*, \lambda}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m_*, \lambda}(1) \geq c_*(m_*, \lambda, \lambda + 1) + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Расставляя столбцы матриц так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим

$$\pi(n^2) = 2\pi(\lambda) + \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

или

$$\pi(n^2) = 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) + \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

Так как $\lambda = \frac{n^2}{2}$. Это и есть утверждение Теоремы 28.2.

Теорема 28.3 *Функция $c_*(m_*, 2n, \lambda)$ где*

$$m_* = m + m^*, \quad m = \pi(n), \quad m^* = \pi(\sqrt{2n+1}), \quad (\lambda, 2n) = \nu(2n), \quad 2n < \lambda < 2n^2,$$

определяется формулой

$$c_*(m_*, 2n, \lambda) \geq \pi(2n) - \pi(n) - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $M_{m_*, 2n}(1)$ и $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, удовлетворяющие условиям теоремы. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. В матрице $M_{m_*, 2n}(1)$ количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = 2n - \pi(2n)$.

2. В матрице $M_{m_*, 2n}(\lambda)$ количество зачеркнутых столбцов есть $k_2 = 2n - \pi(\lambda + 2n) - \pi(\lambda)$.

Так как эти матрицы имеют одинаковое количество столбцов, но в матрице $M_{m_*, 2n}(\lambda)$ количество зачеркнутых столбцов на 1 больше количества зачеркнутых столбцов в матрице $M_{m_*, 2n}(1)$, потому что столбцы, соответствующие числам 1 и 2, не зачеркнуты. Но в матрице $M_{m_*, 2n}(\lambda)$ не зачеркнуты только те столбцы, которые соответствуют простым числам. Поэтому, учитывая, что эти матрицы имеют одинаковое количество столбцов и то, что

$$\overline{M}_{m_*, 2n}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2n}(1) = c_*(m_*, 2n, \lambda),$$

получим

$$\overline{M}_{m_*, 2n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2n}^{k_1}(1) = c_*(m_*, 2n, \lambda) \geq \pi(2n) - \pi(n) - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Теорема 28.3 доказана.

Следствие 28.3 Функция $c_*(m_*, 2n, \lambda)$ показывает не только разность нулевых остатков в зачеркнутых столбцах матриц в виде $\overline{M}_{m_*, 2n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2n}^{k_1}(1)$, но и разность ненулевых остатков в этих же столбцах.

Доказательство. Так как формула $L_m(n_j) + \nu(n_j) = \pi(n)$ определяет сумму количеств нулевых и ненулевых остатков j -го столбца любой матрицы, удовлетворяющей условиям теоремы, то доказательство следствия тривиально вытекает из теоремы 28.3.

Глава 29

Побочные и средние матрицы остатков. Симметричные матрицы

Теорема 29.1 *Матрица остатков, обладающая средним столбцом, состоит из определенного количества побочных и средних матриц.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m,2N+1}(1)$. Она обладает средним столбцом, потому что ее крайние столбцы соответствуют нечетным числам. Пусть $n = [\sqrt{2N+1}]$, а $m = \pi(n)$. Представим матрицу $M_{m,2N+1}(1)$ в виде

$$M_{m,2N+1}(1) = M_{m,kn}(1) + M_{m,kn}(kn+1) + \cdots + M_{m,kn}(2N+1-kn),$$

где $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

Все матрицы вида $M_{m,kn}(1)$ и расположенные по краям матрицы $M_{m,2N+1}(1)$, как например $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,n}(2N+1-n)$, или $M_{m,2n}(1)$ и $M_{m,2n}(2N+1-2n)$ являются побочными матрицами матрицы $M_{m,2N+1}(1)$, а все матрицы вида $M_{m,n}(n+1)$ и $M_{m,n}(2N+1-2n)$, или $M_{m,2n}(2n+1)$ и $M_{m,2n}(2N+1-3n)$ являются средними матрицами матрицы $M_{m,2N+1}(1)$. Теорема доказана.

Следствие 29.1 *Побочные и средние матрицы, которые находятся на равных расстояниях от среднего столбца матрицы $M_{m,2N+1}(1)$ называются симметричными матрицами остатков и имеют одинаковое количество столбцов.*

Доказательство следствия тривиально вытекает из доказательства теоремы.

Замечание. Побочные матрицы иногда можно называть боковыми, потому что они расположены по бокам главной матрицы.

Теорема 29.2 *Любая квадратная матрица обладает определенным количеством средних и побочных (боковых) матриц остатков.*

Доказательство. Вспомним, что количество столбцов квадратной матрицы равно полному квадрату натурального числа. Сначала мы докажем теорему для начальной квадратной матрицы, т.е. для матрицы $M_{m,n^2}(1)$, где $m = \pi(n)$, $2 \nmid n$. Ясно, что матрицу $M_{m,n^2}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,kn}(1) + M_{m,kn}(kn+1) + \cdots + M_{m,kn}(n^2-kn+1), \quad 1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Следовательно, матрицы $M_{m,kn}(1)$ и $M_{m,kn}(n^2-kn+1)$ являются побочными (боковыми) матрицами по отношению среднего столбца матрицы $M_{m,n^2}(1)$, при $m =$

$\pi(n)$, $2 \nmid n$. А матрицы, которые находятся между боковыми матрицами и имеют одинаковые размеры, называются средними матрицами. Например, матрицы $M_{m,n}(n+1)$ и $M_{m,n}(n^2 - 2n + 1)$.

Аналогичную теорему можно доказать и для матрицы $M_{m,n^2}(\lambda)$, где $m = \pi(n)$, независимо от четности $\lambda \geq 2$. Потому что крайние столбцы квадратной матрицы соответствуют числам одинаковой четности.

Теорема 29.3 *На числовом отрезке $[(p-1)^2, (p+1)^2]$ есть как минимум одна пара простых чисел близнецов.*

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $M_{m^*,(p-1)^2}(1)$ и $M_{m^*,(p-1)^2}(p+1)$, где $m = \pi((p-1)^2)$, $m^* = \pi(p)$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем у этих матриц все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$. А также те столбцы, которые соответствуют простым числам p_k , где $p < p_k < (p-1)^2$. Обращая внимание на матрицы с зачеркнутыми столбцами, заметим, что

1. В матрице $M_{m^*,(p-1)^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(p) + 1$, а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_1 = (p-1)^2 - \pi(p) - 1$. Так как столбец, соответствующий числу 1 не зачеркнут.

2. В матрице $M_{m^*,(p-1)^2}(p+1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_2^* = \pi((p-1)^2) - \pi(p) + \chi$. Где χ - количество тех простых чисел p_k^* , где $(p-1)^2 < p_k^* < (p+1)^2$. А количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть

$$k_2 = (p+1)^2 - k_2^* = (p+1)^2 - \pi((p-1)^2) + \pi(p) - \chi - 1.$$

Потому что крайние столбцы этой матрицы зачеркнуты.

Расставляя столбцы матриц так, чтобы с одной стороны расположились зачеркнутые столбцы, а потом незачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим $\chi = \pi(p) - 1$. В противном случае мы не сможем утверждать, что $0_n = \prod_{i=1}^m$, $m = \pi(p^2)$, если $n = p^2$.

Так как χ показывает количество простых чисел вида p_k^* , следовательно, каждое из этих простых чисел при делении на 2;3;4;5 дадут остатки, равные числам 2;3;4;5 различными вариантами, следовательно, среди них будет как минимум одна пара таких простых чисел, которые дадут остатки 2;4, или 3;5, которые и будут простыми близнецами.

Следствие 29.2 *Имеет место соотношение*

$$f^*(2^{2p}) - f^*(2^p) \geq f^*(2^p) - 1,$$

где функция $f^*(x)$ показывает количество пар простых чисел близнецов на отрезке $[1, x]$.

Доказательство следствия вытекает из доказательства теоремы. Рассмотрим матрицу

$$\begin{aligned} M_{m^*,(4n)^2}(1) &= M_{m^*,(2n)^2}(1) + M_{m^*,(2n)^2}((2n)^2 + 1) = \\ &= M_{m^*,4n}(1) + M_{m^*,4n}(4n + 1) + \dots + M_{m^*,4n}((2n)^2 - 4n + 1), \end{aligned}$$

где $m = \pi((2n)^2)$, $m^* = \pi(2n)$.

Теперь, рассуждая, как в теореме, получим следствие.

Теорема 29.4 В каждой из матриц $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, где

$$(\lambda, 2n) = \nu(2n), \quad 2n < \lambda \leq (2n)^2, \quad m_* = m + m^*, \quad m = \pi(2n), \quad m^* = \pi(\sqrt{2n^2 + 1}),$$

содержится не менее, чем $\left\lceil \frac{\pi(n)}{4} \right\rceil - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}$ столбцов, каждый из которых соответствует простому числу.

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $M_{m_*, 2n}(1)$ и $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, где

$$(\lambda, 2n) = \nu(2n), \quad 2n < \lambda \leq (2n)^2, \quad m_* = m + m^*, \quad m = \pi(2n), \quad m^* = \pi(\sqrt{2n^2 + 1}).$$

Зачеркнем у этих матриц все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. В матрице $M_{m_*, 2n}(1)$ количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = 2n - \pi(2n)$.

2. В матрице $M_{m_*, 2n}(\lambda)$ количество зачеркнутых столбцов есть $k_2 = 2n - \pi(\lambda + 2n) + \pi(\lambda)$.

Согласно Теореме 28.3 мы имеем

$$c_*(m_*, 2n, \lambda) \geq \left\lceil \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{4} \right\rceil - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\},$$

следовательно, имеет место соотношение

$$\overline{M}_{m_*, 2n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2n}^{k_1}(1) \geq c_*(m_*, 2n, \lambda) = \left\lceil \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{4} \right\rceil - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Или

$$\pi(\lambda + 2n) - \pi(\lambda) \geq \left\lceil \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{4} \right\rceil - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\},$$

$$\pi(\lambda + 2n) - \pi(\lambda) \geq \left\lceil \frac{\pi(n)}{4} \right\rceil - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Теорема 29.4 доказана.

Следствие 29.3 Имеют место соотношения

$$a) \pi((2n)^2) \geq 2\pi(2n^2) + [\log_2 n] - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\},$$

$$b) \pi((2n)^2) \geq 2\pi(2n^2) + \left\lceil \frac{\pi(n) - 1}{4} \right\rceil - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $N_{m_*, 2n^2}(2 \nmid 1)$ и $N_{m_*, 2n^2}(2 \mid 2)$, где $m_* = m + m^*$, $m = \pi(2n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n^2})$.

Зачеркнем у этих матриц все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq \pi(n^2)$ и $1 < i^* \leq m^*$.

1. В матрице $N_{m_*, 2n^2}(2 \nmid 1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_1^* = \pi((2n)^2) = 2\pi(2n^2) + [\log_2 n] - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\},$$

а количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = 2n^2 - k_1^*$.

2. В матрице $N_{m_*, 2n^2}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_2^* \geq 2\pi(2n^2) + [\log_2 n] - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть

$$k_2 \geq 2\pi(2n^2) + \left\lceil \frac{\pi(n) - 1}{4} \right\rceil - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Расставляя столбцы матриц так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, и учитывая еще в них функцию $c(m_*, 2n^2, 2n^2 + 1)$, получим утверждение Следствия 29.3.

Замечание. Такие же ответы получили, рассматривая матрицу

$$M_{m_*, (2n)^2}(1) = M_{m_*, 2n^2}(1) + M_{m_*, 2n^2}(2n^2 + 1),$$

где $m_* = m + m^*$, $m = \pi(2n^2)$, $m^* = \pi(2n)$.

Следствие 29.4 При $k \geq 2$ имеет место соотношение

$$\pi(n^k) \geq (\pi(n) + 1)^k + \pi(n) - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*, n^k}(1)$. Ее можно представить в виде

$$M_{m_*, n^k}(1) = N_{m_*, \lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, \lambda}(2|2),$$

где $\lambda = \left\lceil \frac{n^k}{2} \right\rceil$, $m = \pi(\lambda)$, $m^* = \pi(\sqrt{n^k})$.

Зачеркнем у этих матриц все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq m = \pi(\lambda)$ и $1 < i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{n^k})$.

1. В матрице $N_{m_*, 2n^2}(2 \uparrow 1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(2\lambda)$, а количество зачеркнутых столбцов $k_1 = 2\lambda - \pi(2\lambda)$.

2. В матрице $N_{m_*, \lambda}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_2^* = 2\pi(\lambda) + 2[\log_2 \sqrt{\lambda}] - 2$, а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_2 = 2\lambda - k_2^*$.

Потому что при зачеркивании четных столбцов матрицы $M_{m_*, n^k}(1)$ столбцы, соответствующие числам 2 и 2^s , не зачеркиваются. Следовательно

$$\overline{N}_{m_*, \lambda}^{k_2}(2|2) - \overline{N}_{m_*, \lambda}^{k_1}(2 \uparrow 1) = c_*(m_*, \lambda, \lambda + 1).$$

Получим

$$\pi(n^k) \geq (\pi(n) + 1)^k + 2[\log_2 n^k] - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

С другой стороны, если бы мы зачеркнули все те столбцы, в каждом из которых было бы как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$, то получили бы утверждение Следствия 29.4.

Следствие 29.5 Если $2 \leq k \leq n$, то имеют место соотношения

$$a) \pi(n^k) \geq (\pi(n) + 1)^2 + 2[\log_2 k] - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},$$

$$b) \pi(n^k) \geq (\pi(n) + 1)^2 + \pi(n) - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}.$$

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$ и $N_{m_*,\lambda}(2|2)$, где $\lambda = \left\lfloor \frac{n^k}{2} \right\rfloor$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi(\lambda)$, $m^* = \pi(\sqrt{n^k})$.

а) Зачеркнем у этих матриц все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m = \pi(\lambda)$ и $1 \leq i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{n^k})$.

1. В матрице $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(2\lambda)$, а количество зачеркнутых столбцов $k_1 = 2\lambda - \pi(2\lambda)$. Потому что столбец, соответствующий числу 1 тоже не зачеркнут.

2. В матрице $N_{m_*,\lambda}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_2^* = \pi(2\lambda) + 2[\log_2 k] - 2$, а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_2 = 2\lambda - k_2^*$.

Потому что столбцы, соответствующие числам 2 и 2^s , где $\lambda < 2^s \leq 2\lambda$ не зачеркиваются. Так как

$$\overline{N}_{m_*,\lambda}^{k_2}(2|2) - \overline{N}_{m_*,\lambda}^{k_1}(2 \uparrow 1) = c_*(m_*, \lambda, \lambda + 1),$$

то следовательно, получим пункт а) Следствия 29.5.

б) Если бы мы зачеркнули все те столбцы этих матриц в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m = \pi(\lambda)$ и $1 \leq i^* \leq m^*$, то получили бы.

1. Количество незачеркнутых столбцов $k_1^* = \pi(2\lambda)$, а количество зачеркнутых столбцов $k_1 = 2\lambda - \pi(2\lambda)$.

2. В матрице $N_{m_*,\lambda}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_2^* = \pi(2\lambda) + 2[\log_2 k] - 2$, а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_2 \geq 2\lambda - k_2^* - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(n) > 1 \end{array} \right\}$.

Отсюда сразу получаем пункт б) Следствия 29.5.

Следствие 29.6 Если $2 \leq k \leq n$, то имеют место соотношения

$$a) \pi(2^k) \geq (\pi(2^{k-1}) + 1)^2 + 2[\log_2 2^k] - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(n) > 1 \end{array} \right\},$$

$$b) \pi(2^k) \geq (\pi(2^{k-1}) + 1)^2 + \pi(2^{k-2}) - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $N_{m_*,2^k}(2 \uparrow 1)$ и $N_{m_*,2^k}(2|2)$, где $m_* = m + m^*$, $m = \pi(2^{k-1})$, $m^* = \pi(\sqrt{2^k})$.

Зачеркивая у этих матриц все те столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка

а) в строках $1 < i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$;

б) в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$;

и рассуждая так же, как при доказательстве Следствия 3, получим утверждение Следствия 29.6.

Замечание. Если матрицы остатков показывают, что натуральный ноль (0_n) принимает значения $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$, то расширенные матрицы остатков показывают, что

$$0_n^* = \prod_{i=1}^m p_i + \prod_{q=1}^{m^*} p_q,$$

где $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{n})$.

Следовательно, число НОЛЬ (0), которое, как считаем, кратно всем целым числам, приводит к неопределенностям на числовой оси. Матрицы остатков ограничивают область делителей числа НОЛЬ для квадратных матриц. Метод двойного решета показал это ограничение для точки отсчета с левой и с правой стороны.

Глава 30

Комбинаторика на числовой оси

Применение известной формулы комбинаторики $C_a^b = C_a^{a-b}$ при $a = n$, $b = \pi(n)$ приводит к соотношению $C_n^{\pi(n)} = C_n^{n-\pi(n)}$ или $C_n^{\pi(n)-1} = C_n^1$. Это вызывает ряд интересных вопросов в том случае, когда мы хотим применить ее для определения количества простых и составных чисел на числовых отрезках $[1, 2n]$ и $[1, n^2]$, где n - целое число. Теоремы, которые были доказаны в предыдущих разделах, подтверждают это. Зачеркивание столбцов расширенной матрицы $M_{m_*, n^2}(1)$, где $m_* = m + m^*$, $m = \pi(\frac{n^2}{2})$, $m^* = \pi(n)$, фактически указывает на следствия формулы $C_n^{\pi(n)-1} = C_n^1$. Зачеркивая в матрице $M_{m_*, n^2}(1)$ все те столбцы у этой матрицы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка, мы, фактически, выделяем все те столбцы этой матрицы, которые соответствуют составным числам. Так как в каждом столбце матрицы $M_{m_*, n^2}(1)$ содержится $\pi(n)$ нулевых и ненулевых остатков, поэтому $m^* = \pi(n)$ становится расширяющим фактором, потому что, если $p_q^2 | n_j^2$, то $p_q | n_j$ и $p_q^s | n_i^2$, где

$$2 \leq n_j \leq n^2, \quad 2 \leq p_q \leq [\sqrt{n^2}], \quad 2 \leq p_q^s \leq n^2.$$

В итоге получаем, что формула $C_n^{\pi(n)} \simeq C_{n^2}^{n^2-\pi(n)}$ и метод двойного решета равносильны на числовой оси и являются причиной образования побочных (боковых) и средних матриц в матрицах остатков.

С другой стороны, возникает вопрос: можно ли процесс такого числообразования распространить и на отрицательный участок числовой оси? Ведь рассматривая матрицы $M_{m_*, 2n}(1)$ и $M_{m_*, n^2}(1)$, мы изучаем только положительные числа!

Не трудно заметить, что натуральный ноль 0_n ограничивая числовую ось, превращает ее в сумму отрезков, имеющих одинаковые размеры в виде матриц. Числообразование на которых происходит почти по одинаковым законам, которые диктуют математические действия.

Теория матриц остатков (матричная математика) убеждает нас в том, что на числовой оси нет безразмерных чисел, каждое из них показывает определенное количество единичных отрезков, имеющих определенную длину.

Поэтому не только составное, но и простое число есть сумма единичных отрезков и представимо в виде произведения двух чисел. Конечно, простое число невозможно представить в виде произведения как минимум двух простых чисел, поэтому простое число кратно только единице, а то, что простое число считается кратным самому себе, это условность.

Так как из того, что $p_i | p_i^s$ следует, что $p_i | p_i$. Принимая p_i^s за единицу, p_i станет p_i^s , потому что шагая от точки p_i с длиной шага p_i , мы через k шагов наступим на точку p_i^s . Двигаясь в обратном направлении от точки p_i^s с такой же длиной шага, мы тоже через k шагов наступим на точку p_i . Поэтому понятие числа на числовой оси зависит

не только от точки начала отсчета, но и от направления расчета единичных отрезков. Это следует из главной аксиомы нашей математики, что число 0 кратно всем целым числам. Поэтому мы и удивляемся, когда встречаемся с формулами $0!=1$ или $C_a^0 = 1$.

Матричная математика старается сгладить те условности, которые допущены в существующей математике и сталкивается с огромными трудностями, которые создают поклонники традиционной математики, для которых нет разницы между длиной и площадью поверхности, или объемом. Они были вынуждены признать существование иррациональных и мнимых чисел, не вникая в истинную сущность этих чисел. Особенно это проявляется при решении уравнений любой степени, потому что невозможно толком понять механику решения уравнения, и чем отличается уравнение от равенства и от тождества.

Как дополнение к сказанному, рассмотрим уравнения а) $2x - 30 = 0$ и б) $2x - x^{30} = 0$. Считаем, что уравнение а) имеет одно решение $x = 15$, а уравнение б) имеет 30 решений. И не понятно, по каким критериям определяется количество этих решений.

В матричной математике эти уравнения рассматриваются как совокупности чисел

$$a) 1, 2, 3, \dots, 30; \quad b) 1, 2, \dots, x^{30}.$$

И нужно найти количество шагов определенной длины, чтобы начиная движение от точки (числа) 1 через определенное количество шагов наступить на точку а) 30, б) x^{30} .

В случае а) это простые или все делители числа 30, в случае б) $\nu(30x)$.

Такой подход приводит нас к тому, что любое уравнение любой степени имеет определенное количество целых решений, которые с помощью дифференцирования можно свести к решению квадратного, биквадратного, или кубического уравнению. Это доказывает, что число 0 не может быть кратным всем целым числам. Потому что это противоречит определению числовой оси.

Принимая понятие натурального нуля

$$0_n^* = \prod_{i=1}^m p_i + \prod_{q=1}^{m^*} p_q,$$

где $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{n})$, мы ограничиваем количество целых чисел отрезка $[\lambda, \lambda + n]$. Представляем их в матрице $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, где

$$(\lambda, n) = \nu(n), \quad m_* = m + m^*, \quad m = \pi\left(\frac{n^2}{2}\right), \quad m^* = \pi(n),$$

и изучаем каждый столбец этой матрицы, как вдоль числовой оси, так и по вертикали. Поэтому любой столбец квадратной матрицы показывает реальное число, а ее средний столбец становится главной точкой (столбцом) отсчета для расчета остальных столбцов (чисел) в этой матрице.

Такой подход к числовой оси приводит нас к тому, что числообразование не зависит от той части матрицы, которая находится на отрицательном участке числовой оси, потому что не только матрица $M_{m_*, n^2}(1)$ является квадратной но и матрица $M_{m_*, n^2}(-n)$. Поэтому закономерности числообразования на них протекают почти по однообразным законам.

Так как каждый столбец матрицы характеризуется не только нулевыми, но и ненулевыми остатками, то формула

$$L_{m_*}(n_j) + \nu_{m_*}(n_j) = \pi_{m_*}(n_j)$$

становится главной характеристикой для столбца под порядковым номером n_j . Конечно, приходится точно определять сумму $m_* = m + m^*$, которую символически обозначим $\pi_{m_*}(n_j)$.

Матрицы остатков утверждают, что на виртуальной прямой отмечая точку, которая превращает эту прямую в числовую ось, фактически определяет геометрические места всех чисел, которые находятся на левой и правой стороне от точки, которую называем началом данной числовой оси, и все числа на этой оси становятся равноправными.

Это приводит к тому, что числа вида 2^s , где $1 < 2^s \leq n$, $2 \nmid s$, называются иррациональными потому что не только они равноудалены от среднего столбца матрицы $M_{m_*, n^2}(1)$, но и простые числа p_k , где $n(n-1) < p_k < n^2$. Рассматривая матрицу $M_{m_*, n^2}(-n)$ по этой же причине столбцы промежутка $[-n, -1]$, каждый из которых содержит только один нулевой остаток в строках $1 < i < m$ и $1 < i^* \leq m^*$, называются простыми столбцами, а их соответствующие числа называются мнимыми, потому что хотя они отрицательные, но все же целые числа. В этом смысле отрицательные числа можно называть остатками, потому что остатки (вычеты) определяются по модулю.

Таким образом, простым столбцам матрицы $M_{m_*, n^2}(-n)$, которые находятся в промежутке целых чисел $[-n, -1]$, и столбцам матрицы $M_{m_*, n^2}(1)$, которые соответствуют числам вида 2^s , где $1 < 2^s < n$, $2 \nmid s$, можно назвать потенциально простыми числами, потому что они порождают новые простые числа на отрезке целых чисел $[(n-1)^2, n^2]$. Учитывая относительность понятия числа на числовой оси некоторые простые числа из промежутка чисел $[(n-1)^2, n^2]$ можем называть иррациональными, а некоторые мнимыми, в зависимости от точки, которую считаем для них началом отсчета.

Кроме того, при натуральном значении x и y имеем

$$x^y = 0_n \implies x^n = 0_n \implies x^n = N_1,$$

где $N_1 \gg n$ и с помощью матриц остатков можем определить $\pi(N_1)$, потому что матрицу $M_{mx^n}(1)$, $m = \pi(n)$, всегда можно представить как сумму определенного количества матриц остатков $M_{m,n}(1)$, где $m = \pi(n)$.

В этом нам помогут процессы извлечения корня, логарифмирования и дифференцирования, если число x рассмотрим как функцию $f(x) = x^n$, а n как конкретное число. Следовательно, процесс дифференцирования можно рассматривать как противоположное действие возведения x в степень n (конкретное число). Такой подход поможет нам определить $\pi(x^p)$ с помощью $\pi(x)$ и $[\log_2 x]$, или $\pi(2x)$ и $[\log_2 2x]$, или с помощью $[\log_2 n]$ и $[\log_2 2n]$.

В этом процессе выясняется, что простые числа 2, 3 и 5 играют основную роль в числообразовании чисел на числовой оси, потому что остальные простые числа имеют вид $4x-1$ и $4x+1$. Поэтому любое уравнение, которое имеет столько решений сколько самая большая степень этого уравнения, можно свести к квадратному, кубическому или биквадратному уравнению. Хотя без теории матриц остатков трудно себе это представить.

Глава 31

Потенциально простые числа и уравнения

С помощью матриц остатков решаются не только проблемы распределения простых чисел на отрезке целых чисел $[\lambda, 2\lambda + 1]$, но и уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + 1 = 0, \quad -x < a_i < x. \quad (31.1)$$

(31.1) рассматриваются как сумма различных равенств, или тождеств в виде матриц остатков, у которых нужно найти количество столбцов, соответствующих простым или составным числам. Например,

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + \dots + M_{m,n}(n^2 - n + 1) = \\ &= M_{m,2n}(1) + M_{m,2n}(2n+1) + \dots + M_{m,2n}(n^2 - 2n + 1) = \\ &\dots\dots\dots \\ &= M_{m,kn}(1) + M_{m,kn}k(n+1) + \dots + M_{m,kn}(n^2 - kn + 1) = \\ &= M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda+1) = N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m,\lambda}(2|2), \end{aligned}$$

где $\lambda = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$.

Теорема 31.1 При $p > 3$ имеет место соотношение

$$2\pi(p^2) + \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1 \geq \pi(2p^2) \leq 2\pi(p^2) + [\log_2 p] + 1. \quad (31.2)$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m^*, 2p^2}(1)$, где $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$, $m_* = m + m^*$. Представим ее в виде

$$M_{m_*, 2p^2}(1) = M_{m, p^2}(1) + M_{m^*, p^2}(p^2 + 1).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq m = \pi(p^2)$ и $1 < i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$.

1. В матрице $M_{m, p^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(p^2) + 2[\log_2 p]$, а количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = p^2 - k_1^* = p^2 - \pi(p^2) - 2[\log_2 p]$.

Потому что в матрице $M_{m^*, p^2}(1)$ имеется $2[\log_2 p]$ столбцов. В каждом из которых содержится по одному нулю в строках $i = 1$ и $i^* = 1$. И эти столбцы не зачеркнуты.

2. В матрице $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ количество незачеркнутых столбцов равно

$$k_2^* = \pi(2p^2) - \pi(p^2) + 1,$$

а количество зачеркнутых столбцов

$$k_2 = p^2 - k_2^*,$$

потому что среди чисел $p^2 + 1, p^2 + 2, \dots, 2p^2$ есть только одно число вида 2^s , $p^2 < 2^s < 2p^2$.

Так как

$$\overline{M}_{m_*, p^2}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}(1) = c_*(m_*, p^2, p^2 + 1),$$

то следовательно, имеют место соотношения

$$\overline{M}_{m_*, p^2}^{k_2}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}^{k_1}(1) = c_*(m_*, p^2, p^2 + 1) - \pi(2p^2) + \pi(p^2) - 1. \quad (31.3)$$

Следовательно,

$$\overline{M}_{m_*, p^2}^{k_2^*}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}^{k_1^*}(1) = c_*(m_*, p^2, p^2 + 1) - \pi(p^2) - 2[\log_2 p] - 1. \quad (31.4)$$

Здесь k_2 и k_1 - количество тех столбцов матриц $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ и $M_{m_*, p^2}(1)$, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в зачеркнутых строках $1 < i \leq m$ и $1 < i^* \leq m^*$.

Вычитая (31.4) из (31.3), и учитывая, что

$$\overline{M}_{m_*, p^2}^{k_2}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}^{k_1}(1) \geq \left\lceil \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rceil - 1,$$

и

$$\overline{M}_{m_*, p^2}^{k_2^*}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}^{k_1^*}(1) \geq [\log_2 p],$$

получим выражение (31.2). Таким образом, Теорема (31.1) доказана.

Следствие 31.1 При $p > 3$ имеет место соотношение

$$\pi(2p^2) - 2\pi(p^2) = [\log_2 2p^2] - [\log_4 2p^2]. \quad (31.5)$$

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $M_{m_*, p^2}(1)$ и $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$, где $p > 3$, $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq m = \pi(p^2)$ и $1 < i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$.

1. В матрице $M_{m_*, p^2}(1)$ количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = p^2 - \pi(p^2) - 2[\log_2 p]$, потому что столбцы, соответствующие числам 1 и 2 не зачеркнуты, а столбцы, соответствующие числам $2p_i^k$, где $p_i > 3$, $4 < 2p_i^k \leq p^2$, $2 < k \leq [\sqrt{2p}]$, все зачеркнуты.

2. В матрице $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ количество зачеркнутых столбцов есть $k_2 = p^2 - \pi(2p^2) + \pi(p^2)$, потому что все остальные столбцы зачеркнуты, учитывая, что $k_1^* - k_2^* = [\log_4 2p^2]$.

Вычитая k_2^* из k_1^* , получим

$$\pi(2p^2) - 2\pi(p^2) = [\log_2 2p^2] - [\log_4 2p^2] = [\log_2 p].$$

Следствие 31.2 При $p > 5$ имеет место соотношение

$$\pi(2p^2) - 2\pi(p^2) = [\log_3 2p^2] + [\log_5 2p^2] - 1 = [\log_2 p]. \quad (31.6)$$

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*, 2p^2}(1)$, где $p > 5$, $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$, $m_* = m + m^*$. Представим ее в виде

$$M_{m_*, 2p^2}(1) = M_{m_*, p^2}(p^2 + 1) + M_{m_*, p^2}(1).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$. Но $p_q^2 \neq 3^2$, $p_q^2 \neq 5^2$.

1. В матрице $M_{m_*, p^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть

$$k_1^* = \pi(p^2) + [\log_3 2p^2] + [\log_5 2p^2] + 1,$$

а количество зачеркнутых столбцов есть

$$k_1 = p^2 - \pi(p^2) - [\log_3 2p^2] - [\log_5 2p^2] - 1.$$

2. В матрице $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ количество незачеркнутых столбцов $k_2^* \geq \pi(2p^2) + \pi(p^2) + 2$.

Среди чисел $p^2 + 1, p^2 + 2, \dots, 2p^2$, возможно, есть одно число вида 3^s , где $p^2 < 3^s < 2p^2$, и одно число вида 5^s , где $p^2 < 5^s < 2p^2$.

Расставляя столбцы матриц так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим выражение (31.6). Потому что хотя общее количество столбцов у матриц равное, но количество четных столбцов у матрицы $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ на единицу больше, чем количество четных столбцов у матрицы $M_{m_*, p^2}(1)$, а количество нечетных столбцов у матрицы $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ на единицу меньше, чем количество четных столбцов у матрицы $M_{m_*, p^2}(1)$. Поэтому и получаем выражение (31.6).

Примечание. Так как с помощью матриц остатков можно точно определить величину $\pi(2p^2) - 2\pi(p^2)$, следовательно, любую проблему числообразования на числовой оси можно определить совершенно точно. Об этом нам говорят Следствия 31.1 и 31.2.

Теорема 31.2 В матрице $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, где $\lambda > 2p$, $(\lambda, 2p) = \nu(2p)$ имеется не менее $\left\lfloor \frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right\rfloor - 1$ столбцов, каждый из которых соответствует простому числу.

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $M_{m_*, 2p}(1)$ и $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, которые удовлетворяют условиям нашей теоремы и где $m = \pi(2p)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p+1})$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. В матрице $M_{m_*, 2p}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(2p) + 1$, а количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = 2p - \pi(2p) - 1$. Так как столбец, соответствующий числу 1 не зачеркнут.

2. В матрице $M_{m_*, 2p}(\lambda)$ количество незачеркнутых столбцов обозначим $k_2^* = X$. Величина X показывает те столбцы этой матрицы, которые соответствуют простым числам p_k , $\lambda < p_k < \lambda + 2p$. Тогда количество зачеркнутых столбцов этой матрицы $k_2 = 2p - X$.

Так как

$$\overline{M}_{m_*, 2p}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2p}(1) = c_*(m_*, 2p, \lambda),$$

или

$$\overline{M}_{m_*, 2p}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2p}^{k_1}(1) \geq c_*(m_*, 2p, \lambda) + \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1,$$

получаем, что $k_2^* - k_1 \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right\rfloor - 1$, т.е. $X \geq \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1$. Эти соотношения доказывают Теорему 31.2.

Такой же ответ мы получим, если будем расставлять столбцы матриц так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и учитывая, что в матрице $M_{m_*, 2p}(\lambda)$ четных столбцов на единицу больше, чем в матрице $M_{m_*, 2p}(1)$, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим выражение $X \geq \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1$.

В противном случае мы получим, что матрицы $M_{m_*, 2p}(1)$ и $M_{m_*, 2p}(\lambda)$ не имеют равное количество столбцов.

Следствие 31.3 При $p \geq 3$ имеет место соотношение

$$\pi(p^2 + 2p) - \pi(p^2) \geq \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1.$$

Доказательство следствия 1 непосредственно вытекает из теоремы.

Следствие 31.4 Имеют место соотношения

$$a) \pi(2p^2) \geq 2\pi(p^2) + [\log_2 p],$$

$$b) \pi(2p^2) \geq 2\pi(p^2) + \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим расширенные матрицы $M_{m_*, 2p^2}(1)$ и $M_{m_*, 2p^2}(2p + 1)$, где $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(2p)$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках

$$a) 1 < i \leq m, \quad 1 < i^* \leq m^*,$$

$$b) 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq i^* \leq m^*.$$

Рассматривая разность зачеркнутых и незачеркнутых столбцов этих матриц, как при доказательстве Теоремы, получим утверждение Следствия 31.4.

Следствие 31.5 Имеет место соотношение

$$\pi(4p^2) = 2(\pi(2p^2) + [\log_2 p]) = 2\pi(2p^2) + \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1.$$

Доказательство. Справедливо соотношение

$$M_{m_*, 4p^2}(1) = M_{m_*, 2p^2}(1) + M_{m_*, 2p^2}(2p^2 + 1).$$

Отсюда, используя Следствие 31.4, получаем Следствие 31.5.

Следствие 31.6 Имеют место соотношения

$$a) \pi(2^{2p}) \geq (\pi(2^p))^2 + \pi(2^p) - 1, \quad p \geq 3,$$

$$b) \pi(2^{4p}) \geq (\pi(2^{2p}))^2 + (\pi(2^p))^2 - 1.$$

Доказательство. Для доказательства пункта а) рассмотрим расширенные матрицы $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$ и $M_{m_*, 2^{2p}}(2^p + 1)$, где $m = \pi(2^{2p})$, $m^* = \pi(2^p)$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. В матрице $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(2^{2p}) + 1$, а количество зачеркнутых столбцов есть $k_1 = 2^{2p} - \pi(2^{2p}) - 1$.

2. В матрице $M_{m_*, 2^{2p}}(2^p + 1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_2^* = \pi(2^{2p}) - \pi(2^p) + X$. Величина X - число тех столбцов этой матрицы, каждый из которых не зачеркнут и соответствует простому числу p_k , $2^{2p} < p_k < 2^{2p} + 2^p$. Тогда количество зачеркнутых столбцов этой матрицы $k_2 = 2^{2p} - \pi(2^{2p}) + \pi(2^p) + X$.

Сопоставляя матрицы с зачеркнутыми и незачеркнутыми столбцами, получим доказательство пункта а) Следствия 31.6.

Для доказательства пункта б) нужно рассмотреть матрицы $M_{m_*, 2^{4p}}(1)$ и $M_{m_*, 2^{4p}}(2^p + 1)$ и, рассуждая аналогично, как в пункте а), получить доказательство пункта б).

Пояснение. С помощью матриц остатков на числовой оси метод комбинаторики объединяется с методом математической индукции. Из справедливости теоремы для значения простого числа p_k получаем доказательство этой же теоремы для числа p_{k+1} , или для числа p_k^2 .

Потому что простое число на числовой оси может играть роль единичного отрезка.

В этом смысле числовой отрезок длиной p_k невозможно разделить на равные части с длиной p_k^* , где $2 \leq p_k^* < p_k$. Потому что масштаб числовой оси задан заранее и определяет количество точек на данной числовой оси, которые мы называем числами. Поэтому простое число 2 становится главной характеристикой не только для четных, но и для нечетных чисел. Оно (число 2) отделяет четные и нечетные числа друг от друга, приводя их к одинаковой размерности, так как и четные и нечетные числа можно свести к количеству двух единичных отрезков.

Принимая число НОЛЬ (0) кратным всем целым числам, мы не должны забывать, что из этой аксиомы следует, что числовой отрезок невозможно разделить на сколь угодно равные части, и количество точек на данной числовой оси, которые мы называем числами, не может быть бесчисленным. Простые числа на числовой плоскости создают сложную систему числовых осей, которые в прямоугольной координатной системе в виде виртуальных прямых занимают не только числовую плоскость, но и числовое пространство. На точках пересечения этих прямых распределяются не только простые, но и составные числа, так как расстояние этих вертикальных и горизонтальных линий равно определенному количеству единичных отрезков, то числообразование на пересечении этих прямых задается математическими действиями.

Сложение-умножение, вычитание-деление, извлечение корня-возведение в степень, дифференцирование-интегрирование, зависимы от точки, которую считаем началом отсчета. Принимая понятие натурального нуля (0_n), ограничиваем пределы пространственной и плоскостной решетки, ограничивая значения функций $\pi(n)$ и $\nu(n)$ на отрезках $[1, 2n]$ и $[1, (2n)^2]$, сводя их к количеству простых чисел на отрезке $[1, n]$. Поэтому формула $L_m(n_i) + \nu(n_i) = \pi(n_i)$ становится главной характеристикой числовых процессов на числовой оси.

Теорема 31.3 *Имеют место соотношения*

$$\pi(2^{2p}) \leq 2\pi(2^{2p-1}) + 4[\log_2 p] - 1,$$

$$\pi(2^{2p}) \geq 2\pi(2^{2p-1}) + \pi(p) - 1.$$

Доказательство. Представим расширенную матрицу $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$ в виде

$$M_{m_*, 2^{2p}}(1) = N_{m_*, \lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, \lambda}(2|2),$$

где $\lambda = 2^{2p-1}$, $m = \pi(2^{2p-1})$, $m^* = \pi(2^p)$, $m_* = m + m^*$.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$. Рассуждая аналогично доказательству Следствия 29.2, получим Теорему 31.3.

Следствие 31.7 *Для простых чисел p имеет место соотношение*

$$\pi(2^{2p}) - \pi(2^{2p} - 6) = \pi(6) - 1 = 2.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$ и $M_{m_*, 2^{2p}-6}(6)$, где $m = \pi(2^{2p})$, $m^* = \pi(2^p)$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, которые соответствуют четным числам, и те столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка. Учитывая, что те столбцы этих матриц, которые соответствуют числам $6, 7, \dots, 2^{2p} - 6$ общие, их тоже можно считать зачеркнутыми, потому что они имеют одинаковое количество нулевых и ненулевых остатков в обеих матрицах. Следовательно, в матрице $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$ незачеркнутыми останутся столбцы соответствующие числам $1, 3, 5$ и $2^{2p} - 3$ и $2^{2p} - 5$. Потому что число $2^{2p} + 1$ не может быть кратным 3, т.к. $2^{2p} + 1$ всегда есть число вида $p = 4k + 1$ и число $2^{2p} - 1$ кратно 3, а число $2^{2p} + 1$ кратно 5. Следовательно, числа $2^{2p} - 3$ и $2^{2p} - 5$ соответствуют простым числам, т.е. простые близнецы. Следствие 31.7 доказано.

Глава 32

Полные и смежные матрицы остатков

Определение 32.1 Матрица $M_{m,2n+1}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, у которой крайние столбцы соответствуют числам одинаковой четности, называются полными матрицами остатков.

Определение 32.2 Матрица $M_{m,2n}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, у которой количество четных столбцов равно количеству нечетных столбцов, называется смежной матрицей остатков.

Определение 32.3 Матрица $M_{m,n^k}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, где k, n, λ натуральные числа, $2 \leq k \leq n < \lambda$, называется степенной матрицей остатков.

Теорема 32.1 Любая степенная матрица является полной, но не смежной.

Доказательство теоремы тривиально, потому что крайние столбцы степенной матрицы одинаковой четности, поэтому она является полной, но не смежной, так как количество четных и нечетных столбцов у нее отличается на 1.

Следствие 32.1 Полная матрица обладает средним столбцом, который соответствует числу такой же четности, как и ее крайние столбцы.

Доказательство следствия тривиально.

Следствие 32.2 Полную матрицу можно превратить в смежную, если из одного конца данной матрицы убрать один столбец, или к одному концу добавить еще один столбец.

Следствие 32.3 В полных и смежных матрицах, и четные, и нечетные столбцы по отношению друг к другу смещены на расстояние 2-х единичных отрезков.

Доказательство следствия тривиально следует из определения числовой оси.

Теорема 32.2 Имеют место соотношения

$$a) \pi(2p^2 + 2p) - 2\pi(p^2) \geq \left\lceil \frac{[\pi(p)] - 1}{4} \right\rceil - 1,$$

$$b) \pi(2p^2 + 2p) - 2(\pi(p))^2 \leq \frac{\pi(p)}{2} + 1.$$

Доказательство. Представим матрицу $M_{m_*, 2p(p+1)}(1)$ в виде матрицы $M_{m_*, 2p^2}(1)$ и матрицы $M_{m_*, 2p^2}(2p+1)$, где $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(2p)$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$. Обращая внимание на матрицы с зачеркнутыми столбцами, заметим, что

1. В матрице $M_{m_*, 2p^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(2p^2) + 1$, т.к. столбец, соответствующий числу 1, тоже не зачеркнут. А количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_1 = 2p^2 - \pi(2p^2) - 1$.

2. В матрице $M_{m_*, 2p^2}(p+1)$ количество незачеркнутых столбцов, (соответствующих простым числам) есть $k_2^* \geq \pi(2p^2 + 2p) - \pi((p-1) + X - 1)$. Величина X - число тех столбцов этой матрицы, которые соответствует простым числам p_k , где $(2p-1)^2 < p_k < (2p+1)^2$.

При доказательстве пункта а) мы используем обозначение X_a , а при доказательстве пункта б) мы используем обозначение X_b .

Расставляя столбцы матриц так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим пункт а) теоремы. Потому что матрицы имеют одинаковое количество столбцов, получаем $X_a \geq \left\lfloor \frac{\pi(p)}{4} \right\rfloor - 1$, потому что для каждого столбца каждой матрицы $L_{m_*}(j_i) + \nu_m(j_i) = \pi(m_*)$, где j_i показывает номер каждого столбца матрицы.

Для доказательства пункта б) теоремы, нужно рассмотреть матрицы $M_{m_*, 2p^2}(1)$ и $M_{m_*, 2p^2}(2p+1)$, и, рассуждая так же, как при доказательстве пункта а), получить $X_b < \frac{\pi(p)}{2} + 1$ и полное доказательство Теоремы 32.2.

Теорема 32.3 *Имеет место соотношение*

$$\pi(p(k+1)) - \pi(kp) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right\rfloor - 1,$$

где $2 \leq k \leq p$.

Доказательство. Рассмотрим расширенную матрицу $M_{m_*, kp}(k+1)$, где $m = \pi(p)$, $m^* = \pi(\sqrt{kp})$, $m_* = m + m^*$. Представим ее в виде

$$M_{m_*, p(k+1)}(1) = M_{m_*, kp}(1) + M_{m_*, kp}(p+1).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум один нулевой остаток в строках $1 < i \leq m$ и $1 < i^* \leq m^*$, $i_1^* \neq 2^2$. Обращая внимание на матрицы с зачеркнутыми столбцами, заметим, что

1. В матрице $M_{m_*, p}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = [\log_2 p] + 1$, т.к. столбец, соответствующий числу 1, тоже не зачеркнут. А количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_1 = p - [\log_2 p] - 1$.

2. В матрице $M_{m_*, p}(kp+1)$ количество незачеркнутых столбцов, (соответствующих простым числам) есть $k_2^* = X + 1$. Величина X - число тех столбцов этой матрицы, которые соответствует простым числам p_k , где $kp < p_k < kp + p$. А 1 показывает, что среди чисел $kp + 1, kp + 2, \dots, kp + p$ может быть только одно число вида 2^s , где $kp < 2^s < kp + p$. А количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_2 \geq \pi(p(k+1)) - \pi(p) + x - 1$.

Расставляя столбцы матриц так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и учитывая, что количество столбцов матриц

равно между собой, и что в каждом столбце каждой матрицы имеется всего $\pi(p)$ нулевых и ненулевых остатков, сопоставим матрицы с таким расположением столбцов. В результате получим выражение

$$X \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right\rfloor - 1,$$

которое доказывает Теорему 32.3. В противном случае возникает противоречие.

Теорема 32.4 *Если число $2n + 1$ не кратно 3 или 5, то оно или простое число, или полная степень простого числа, или произведение двух простых чисел.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m_*, 2n+1}(1)$, где $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n+1})$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$. Предположим, что столбец, соответствующий числу $2n + 1$, оказался незачеркнутым. Тогда существуют три возможности: а) $2n + 1 = 3p_k$, где $p_k > \sqrt{2n+1}$, в противном случае столбец $2n + 1$ был бы зачеркнут.

б) $2n + 1 = 5p_k$, $p_k > \sqrt{2n+1}$, как в случае а).

с) $2n + 1 = p_k^s$, где $p_k \neq 3$, $p_k \neq 5$, $p_k^s = 2n + 1$, или $2n + 1 = p_k \cdot p_k^*$, где $p_k > 5$, $p_k^* > 5$.

Фактически, мы доказали Теорему 32.4 с помощью метода математической индукции, принимая, что теорема верна при всех значениях n_i , где $1 \leq n_i \leq n-1$, и доказали для значения n . Но теорему можно доказать и без помощи метода математической индукции, пользуясь тем, что среди трех последовательных чисел одно всегда кратно 3. Впрочем, это тоже следствие математической индукции.

Следствие 32.4 *Число $(2p)^2 + 1 = p_k$ - простое, если число p вида $4x + 1$.*

Доказательство. Из Теоремы 32.4 нам известно, что в матрице $M_{m_*, (2p)^2+1}(1)$ столбец, соответствующий числу $(2p)^2 + 1$, может иметь нулевые остатки только в строке $i^* = i_3^*$. Следовательно, если число $(2p)^2 + 1$ не кратно 5, то это простое число.

Теорема 32.5 *Пусть $p \geq 3$ - простое число, тогда матрица $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, где $2p \leq \lambda \leq (2p)^2$, $(\lambda, 2p) = \nu(2p)$, содержит не менее чем $\left\lfloor \frac{\pi(p)-1}{4} \right\rfloor - 1$ столбцов, каждый из которых соответствует простому числу.*

Доказательство. Рассмотрим матрицы $M_{m_*, 2p}(1)$ и $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, где λ удовлетворяет условиям теоремы, а $m = \pi(2p)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p+1})$, $m_* = m + m^*$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц, которые соответствуют четным числам, а также те нечетные столбцы, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$. Тогда

1. В матрице $M_{m_*, 2p}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(2p)$, а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_1 = 2p - \pi(2p)$.

2. Предположим, что в матрице $M_{m_*, 2p}(\lambda)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_2^* = X$, а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_2 \geq 2p - X - 1$.

Расставляя столбцы матриц так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя матрицы с таким расположением столбцов, получим

$$X \geq \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1.$$

Это соотношение доказывает Теорему 32.5, потому что

$$\overline{M}_{m_*, 2p}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2p}^{k_1}(1) \geq c_*(m_*, 2p, \lambda) + \pi(2p),$$

так как в каждом столбце каждой матрицы имеется $\pi(p)$ нулевых и ненулевых остатков.

Следствие 32.5 *Имеет место соотношение*

$$\pi((2p+1)^2) - \pi((2p-1)^2) \geq \left\lceil \frac{\pi(p)-1}{4} \right\rceil - 1.$$

Доказательство следствия тривиально вытекает из доказательства теоремы.

Теорема 32.6 *Для простых чисел $p \geq 3$ имеют место соотношения*

а) Если p - простое число вида $4x-1$, то

$$\pi((2p)^2) = (\pi(p))^2 + \pi(p) - 1;$$

б) Если p - простое число вида $4x+1$, то

$$\pi((2p)^2) = (\pi(p)+1)^2 + 2\pi(p) + 1.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m_*, (2p)^2}(1)$, где $m = \pi(2p^2)$, $m^* = \pi(2p)$, $m_* = m + m^*$. Ее можно представить в виде

$$M_{m_*, (2p)^2}(1) = M_{m_*, 2p^2}(1) + M_{m_*, 2p^2}(2p^2 + 1).$$

Здесь $p \geq 3$ - простое число.

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. В матрице $M_{m_*, 2p^2}(1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_1^* = \pi(2p^2) + 1$, а количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_1 = 2p^2 - \pi(2p^2) - 1$. Потому что столбцы, соответствующие числам 1 и 2, тоже не зачеркнуты.

2. В матрице $M_{m_*, 2p^2}(2p^2 + 1)$ количество незачеркнутых столбцов есть $k_2^* = \pi((2p)^2) - \pi(2p^2) + X$. А количество зачеркнутых столбцов в этой матрице есть $k_2 = (2p)^2 - \pi(2p^2) - X$.

Необходимо учесть, что величины $k_1^*(k_1)$ и $k_2^*(k_2)$ показывают не только количество столбцов, но и количество нулевых и ненулевых остатков в этих столбцах. Возникает вопрос, почему количество нулевых остатков в незачеркнутых столбцах матрицы $M_{m_*, 2p^2}(2p^2 + 1)$ уменьшилось? Дело в том, что в матрице $M_{m_*, 2p^2}(1)$ имеется $2[\log_2 n] - 1$ зачеркнутых столбцов, в каждом из которых есть нулевые остатки только в строках $i = 1$ и $i^* = 1$. А в матрице $M_{m_*, 2p^2}(2p^2 + 1)$ имеется только один такой столбец. Следовательно и $2[\log_2 n] - 1$ нулевых остатков из столбцов $1 < i \leq m$, $1 < i^* \leq m^*$ перешли в четные столбцы этой же матрицы. Таким образом, количество простых чисел на отрезке $[2p^2 + 1, (2p)^2]$ увеличилось по сравнению с количеством простых чисел на отрезке $[1, 2p^2]$. Потому что понятие простого числа тоже относительное на числовой оси, и зависит от направления расчета. Поскольку они рассчитаны от числа 1 в правую сторону, или от точки $(2p)^2$ в левую сторону.

При p вида $4x+1$ величина $k_2^* - k_1^* = \pi(p) + 2$, а при p вида $4x-1$ величина $k_2^* - k_1^* = 1 - \pi(p)$. Учитывая теоремы 32.4 и 32.5, получим, что общее количество простых чисел на отрезке $[1, (2p)^2]$ равно соотношению Теоремы 32.6.

Но с другой стороны, матрицу $M_{m_*,(2p)^2}(1)$ можно представить в виде

$$M_{m_*,(2p)^2}(1) = M_{m_*,2p}(1) + M_{m_*,2p}(2p+1) + \dots + M_{m_*,2p}((2p)^2 + 1 - 2p).$$

И с помощью теорем 32.5 и 32.4 получим Теорему 32.6.

Замечание. Теорему 32.6 можно было бы доказать, представляя матрицу $M_{m_*,(2p)^2}(1)$ как сумму четных и нечетных матриц, т.е.

$$M_{m_*,(2p)^2}(1) = N_{m_*,2p^2}(2 \uparrow 1) + N_{m_*,2p^2}(2|2),$$

или представляя ее как сумму любых других смежных сдвинутых матриц.

Следствие 32.6 *Имеют место соотношения*

а) *Если p - простое число вида $4x - 1$, то*

$$\pi(2^{2p}) = (\pi(2^p) + 1)^2 + \pi(p) - 1;$$

б) *Если p - простое число вида $4x + 1$, то*

$$\pi(2^{2p}) = (\pi(2^p) + 1)^2 + 2\pi(p) + 1.$$

Доказательство. Представим матрицу $M_{m_*,2^{2p}}(1)$, где $m = \pi(2^{2p-1})$, $m^* = \pi(2^p)$, $m_* = m + m^*$, в виде

$$M_{m_*,2^{2p}}(1) = N_{m_*,2^{2p}}(2 \uparrow 1) + N_{m_*,2^{2p}}(2|2).$$

Зачеркнем все те столбцы этих матриц, в каждом из которых есть как минимум два нулевых остатка в строках $1 < i \leq m$ и $1 < i^* \leq m^*$. Определяем по отдельности количество зачеркнутых и незачеркнутых столбцов этих матриц. Расставляя столбцы матриц $N_{m_*,2^{2p}}(2 \uparrow 1)$ и $N_{m_*,2^{2p}}(2|2)$ так, чтобы с одной стороны расположились незачеркнутые столбцы, а потом зачеркнутые, и сопоставляя их с таким расположением столбцов, придем к соотношениям следствия.

Теорема 32.7 *Если $2 \leq k \leq n$, то имеет место*

$$\pi(n^{2k}) = (\pi(n))^k + \begin{cases} 3[\log_2 n] - 1, \\ \pi(n) - 1. \end{cases}$$

Доказательство: Рассмотрим матрицу $M_{m_*n^{2k}}(1)$, которую представим в виде

$$M_{m_*n^{2k}}(1) = N_{m_*\lambda}(2|2) + N_{m_*\lambda}(2 \uparrow 1) = M_{m_*\lambda}(1) + M_{m_*\lambda}(\lambda + 1),$$

где $\lambda = \left\lceil \frac{n^{2k}}{2} \right\rceil$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi((2n^k - 1)^2)$, $m^* = \pi(2n)$. Зачеркнем все те столбцы этих матриц в каждом из которых есть минимум два нулевого остатка в строках $1 < i \leq m$, $1 < i^* \leq m^*$, $p_q^2 \neq 2^2$.

1) В матрице $N_{m_*\lambda}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi((2n^k - 1)^2) + [\log_2 \lambda] + x = (\pi(n))^2 + 2[\log_2 n] + x,$$

где x – количество тех незачеркнутых столбцов, которые соответствуют числам $2^r \cdot p_*$, $(2n^k - 1)^2 < 2^r p_* \leq n^{2k}$, а количество зачеркнутых столбцов $k_1 = \lambda - k_1^*$.

2) В матрице $N_{m_*\lambda}(2 \uparrow 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = (\pi(n))^k + \begin{cases} 2[\log_2 n] + x_* \\ \pi(n) - 1 \end{cases} \quad ; \quad k_2 = \lambda - k_2^*.$$

Потому что матрицы $N_{m_*\lambda}(2|2)$ и $N_{m_*\lambda}(2 \uparrow 1)$ имеют одинаковое количество столбцов, следовательно $x = x_* = \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$.

Так как $\overline{N}_{m_*\lambda}(2 \uparrow 1) - \overline{N}_{m_*\lambda}(2|2) = c_*(m_*2|2, 2 \uparrow 1)$, следовательно $\overline{N}_{m_*\lambda}^{k_2}(2 \uparrow 1) - \overline{N}_{m_*\lambda}^{k_1}(2|2) = c_*(m_*2|2, 2 \uparrow 1) - \overline{N}_{m_*\lambda}^{k_2^*}(2 \uparrow 1) - \overline{N}_{m_*\lambda}^{k_1^*}(2|2)$, где символ $\overline{M}_{m_*n}^k(\lambda)$ показывает количество нулевых остатков этой же матрицы. Следовательно, расставляя столбцы матриц $N_{m_*\lambda}(2 \uparrow 1)$ и $N_{m_*\lambda}(2|2)$ по максимальному количеству нулевых остатков так, чтобы с одной стороны располагались незачеркнутые столбцы а потом зачеркнутые и сопоставляя матрицы в таком расположении столбцов получим теорему. В противном случае получим, что матрицы не имеют равное количество столбцов или при конкретных значениях n и k количество простых чисел $\pi(n^{2k})$ не конкретная величина.

Следствие 32.7 Если $n \geq 10$. то имеет место

- а) при $2 \uparrow n$, $\pi((2n)^2) = (\pi(2n) - 1)^2 + \pi(n) - 1$;
- б) при $2|n$, $\pi((2n)^2) = (\pi(2n) - 1)^2 + 2\pi(n) + 1$;
- с) при $2 \uparrow n$, $\pi((2n)^2) = (\pi(2n) + 1)^2 - \pi(n) - 1$;
- д) при $2|n$, $\pi((2n)^2) = (\pi(2n) + 1)^2 - 2\pi(n) - 1$;
- е) при $2 \uparrow n$, $\pi(2^{2n}) = (\pi(2^n))^2 + \pi(2^n) - 1$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_{m_*(2n)^2}(1)$, представим ее в виде

$$M_{m_*(2n)^2}(1) = N_{m_*\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m_*\lambda}(2|2) = M_{m_*\lambda}(1) + M_{m_*\lambda}(\lambda + 1),$$

где $\lambda = 2n^2$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi((2n - 1)^2)$, $m^* = \pi(2n)$, $p_q^2 \neq 2^2$ и рассуждая так же как и в теореме, получим пункты а) и б) следствия. Для доказательства пунктов с) и д), рассмотрим матрицы $N_{m_*\lambda}(2|2)$ и $N_{m_*\lambda}(2 \uparrow 1)$, когда $m = \pi(\sqrt{2n^2})$ и $m_* = \pi(2n)$ и зачеркивая столбцы матриц также как в теореме.

1) В матрице $N_{m_*\lambda}(2|2)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_1^* = \pi(2n^2) + 2\lfloor \log_2 n \rfloor + x = \begin{cases} (\pi(2n) - 1)^2 + \pi(n) - 1, & \text{при } 2 \uparrow n, \\ (\pi(2n - 1))^2 + 2\pi(n) + 1, & \text{при } 2|n. \end{cases}$$

а количество зачеркнутых столбцов $k_1 = 2n^2 - k_1^*$.

2) В матрице $N_{m_*\lambda}(2 \uparrow 1)$ количество незачеркнутых столбцов

$$k_2^* = \begin{cases} (\pi(2n) + 1)^2 - \pi(n) - 1, & \text{при } 2 \uparrow n, \\ (\pi(2n + 1))^2 - 2\pi(n) - 1, & \text{при } 2|n. \end{cases}$$

а количество зачеркнутых столбцов $k_2 = 2n^2 - k_2^*$.

Рассматривая столбцы матриц так как в теореме и рассуждая также получим пункты с), д) и е) следствия.

Следовательно не только матрицу $M_{m_*n^{2n}}(1)$, где $m = \pi(n)$ можно представить как сумму определенного количества подобных матриц и с их помощью определить функции $\pi(n^n)$ и $\pi(n^{2n})$, $\pi(2^{2n})$ и $\pi(2^{4n})$, но и $\pi(n^{2p} + n) - \pi(n^{2p})$. Потому, что простые числа 2, 3 и 5 играют основополагающую роль в образованиях чисел на числовой оси. Кроме того, умножение чисел показывает количество точек, которых называем числами, а сложение показывает расстояние и нужно согласовать результаты этих процессов, т.е. в матричной математике

$$k \times M_{m,n}(1) \neq M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n + 1) + \dots + M_{m,n}(n(n - 1) + 1),$$

где $2 \leq k \leq n$, и причина этого простые столбцы (числа). Потому что умножение чисел на числовой оси зависит не только от точки отсчета, но и от направления расчета.

Примечание: Матричная математика показывает, что в зависимости от точки расчета чисел на числовой оси, процесс деления может стать коротким умножением, коротким извлечением корня, коротким логарифмированием, коротким дифференцированием. На числовой оси умножение считая коротким сложением требуется дополнительного уточнения, потому что умножение любых чисел показывает площадь поверхности или объем, а сложение показывает расстояние. Поэтому на числовой оси появляются неясности, которые понять с помощью существующей математики невозможно. Математики веками думали об этом: придумывали различные теории, методы, но безуспешно. Потому что основа существующей математики не очень ясна. Теория матриц остатков стремится к этой ясности.

Теорема 32.8 Если $a \pm b$ кратно p , где $(a, b) = 1$, $(b, p) = 1$, $a > p \geq b$, где $p > 2$ - простое число, то $a^p \pm b^p$ кратно p^2 .

Доказательство. Из условия теоремы следует, что мы можем представить число a в виде $a = pa_1 - b$, где a_1 - некоторое натуральное число. Тогда

$$a^p = (pa_1 - b)^p = (pa_1)^p - p(pa_1)^{p-1}b + \dots + p(pa_1)b^{p-1} - b^p.$$

Так как сумма $Q = (pa_1)^p - p(pa_1)^{p-1}b + \dots + p(pa_1)b^{p-1}$ кратна p^2 , то, следовательно, получаем утверждение теоремы в случае $a + b$ кратно p .

Для доказательства теоремы в случае $a - b$ аналогично представим число a в виде $a = pa_2 + b$ и, проводя те же вычисления, получим теорему при $a - b$ кратно p .

Следует сравнить утверждение Теоремы 32.8 с Теоремой 11.3 (стр. 68), с Теоремой 16.2 (стр. 88) и Следствием 16.1 (стр. 88).

Эта теорема показывает преимущество матричной математики по сравнению с существующей математикой, потому что с помощью матриц остатков Великая теорема Ферма становится следствием малой теоремы Ферма, или, точнее, задачей для школьников.

Пояснение: В 1964г. теорему 32.8, в виде 2-х задач отправил в журнал "Математика в школе", опубликовалась только в варианте " $a - b$ " в разделе "Избранные задачи". Позже я вернулся к этой проблеме и в 1967г., в том же журнале N 2, были опубликованы две мои теоремы, но опять в варианте " $a - b$ ". Для доказательства своей правоты я продолжил работу над проблемой делимости чисел и мне удалось доказать "Постулат Бертрана" элементарно. Я поделился этим с известным математиком А. И. Виноградовым (ЛЮМИ) и получил одобрение. Продолжая работать в этом направлении мне удалось создать теорию матриц остатков (матричная математика), и только в начале 21-го века, когда удалось решить много вопросов в распределении простых чисел на числовой оси, решил опубликовать некоторые из этих результатов и "столкнулся со стеной".

P.S. С помощью "Теории матриц остатков" (Матричная математика) получены закономерности простых и составных чисел на числовой оси в виде матриц. Так как такой подход к числам на числовой оси в своем роде совершенно новый, то, возможно, при доказательстве теорем и следствий этого сборника допущены некоторые неточности в расчетах. Это не может стать причиной опровержения этой теории.

Но сторонники традиционной математики, не вникая в истинную суть этой теории, и, даже и не дочитав, опровергают ее, это и стало причиной создания этой книги.

Р.Р.С. Правоту Бертрана в “Постулате Бертрана” доказал Чебышев намного позже. Правоту Ферма в “Малой теореме Ферма” подтвердил и уточнил Эйлер, почти настолько же лет позже. А правоту Ферма в “Великой теореме Ферма” признали только в конце 20-ого века.

Я искренне жалею тех действующих математиков, которые так и не будут знать правоту “Матричной математики”.

Глава 33

Обобщение в виде запоздалого введения

*В древних архитектурных памятниках
есть больше математики, чем в
современных учебниках по математике*

Матричная математика учит нас, что числообразование на числовой оси происходит не так, как в устных расчетах. Потому что числа на числовой оси показывают количество единичных отрезков (масштаб), которые плотно расставлены между началом числовой оси и точкой, которую называем числом. Поэтому на данной числовой оси кроме целых, нет других чисел, которые появляются в результате математических преобразований. Следовательно, нужно выяснить отношение числа с точкой, которую оно занимает. Так как наша математика десятиричная, то при числообразовании на числовой оси простые числа 2, 3 и 5 играют большую роль, потому что другие простые числа вида $4x - 1$ и $4x + 1$.

Числовой „хаос“, который возникает на числовой оси, создают четные и нечетные числа, потому что по отношению друг к другу они сдвинуты на длину единичного отрезка. И те, и другие можно представить, как количество двух единичных отрезков, начало у которых находится на различных точках. На числовой оси нет чисел, которые, одновременно были бы четными и нечетными. Наименование чисел и является причиной этого хаоса. В существующей (классической) математике эти вопросы не освещены четко, и невозможно узнать, является ли она процессом точек, или отрезков. Никакая непрерывная функция, с изменением начала отсчета, не сможет занимать все точки (числа) числовой оси.

Особенно, что числообразование диктуется математическими действиями, начиная от сложения-вычитания, заканчивая дифференцированием и интегрированием.

При математических действиях появляются дробные, иррациональные, мнимые и так далее числа, истинная сущность которых не очень понятна. Потому что математические операции зависят не только от начала отсчета, но и от направления этих операций. Поэтому на числовой оси появляются точки неопределенного характера, что вызывает проблемы во всех разделах математики.

Применение координатных систем не решило все эти проблемы, хотя прогресс был очевидным.

Все попытки математиков привести процессы числообразования к единым законам не увенчались успехом, потому что число НОЛЬ, которое породило главную аксиому существующей математики, есть главная неясность на числовой оси. Число Ноль не может быть кратным всем целым числам, потому что это противоречит простой логике человеческого познания. Оно может иметь много делителей, но все же в ограниченном количестве, в пределах некоторого отрезка числовой оси.

Теорема Фалеса о делимости отрезка на n равных частей, не уточняя длину отрезка и величину числа n , привела к проблемам числообразования на числовой оси. Все знают, что:

- а) число 0 можно умножить на любое число, но нельзя его делить на любое другое число,
 - б) отрицательные числа не логарифмируются,
 - с) не все функции интегрируются
- и т.д.

Существующая математика полна таких запретов и неопределенностей. Спрашивается, почему? Ведь числовая ось создана человеком и имеет простое строение. Почему она должна содержать секреты, которые недоступны человеческому познанию?

Матричная математика вынуждает нас по-новому рассмотреть формулы, которые возникают при решении различных задач, и выяснить их истинную сущность. Как, например, узнать, какая связь между числом 1 и 1^* , которые фигурируют в равенстве

$$\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1^*, \text{ if } n > 0.$$

Приходится разбираться во всех равенствах, которые возникают не только в математике, но и в физике, и в других областях науки.

Существующая математика не всегда дает нам точные результаты. Потому что понятие числа не однозначное, при делении большого числа на малое оно становится остатком, который определяется по абсолютной величине. Эта двойственность числа на числовой оси привела математику к теории относительности, а реальные взаимодействия реальных объектов к дуализму.

Матричная математика утверждает, что пока не раскрыты секреты утверждения, что среди $2n$ последовательных чисел есть n четных и n нечетных, и какое расстояние они занимают на числовой оси, мы не сможем понять, существование несоизмеримых отрезков, проблему магических квадратов, уравнение

$$r^n = x^n + y^n,$$

и т.д. Поэтому нужно освоить теорию матриц остатков, особенно в связи с тем, что сейчас стали много говорить про квантовые компьютеры. Думаем, что теория матриц остатков сможет стать математическим обоснованием компьютеров, которые будут работать намного быстрее, чем ныне существующие.

P.S. Автор будет благодарен за все замечания и комментарии, касающиеся как данного текста, так и всех проблем, которые в нем обсуждаются.

P.P.S. Автор данного текста Эдуард Мкртумян не возражает, чтобы, как весь текст целиком, так и его отдельные части, были напечатаны в научных журналах и монографиях, при условии указания его авторства.

Москва, 25.01.2020

Глава 34

Время собирать камни

“... Не все мысли можно передать словами...”
арм.притча

Только после доказательства всех теорем и следствий этого сборника стало ясно, что для понимания процессов числообразования на числовой оси нужно выяснить механизм математических преобразований чисел в столбцах матриц остатков.

Для решения этих вопросов рассмотрим матрицу остатков $M_{m,n}(1)$, $m = \pi(n)$. Умножая каждое число соответствующее каждому столбцу этой матрицы на 2, получим $2, 4, 6, \dots, 2n$; из которых можно составить четную матрицу $N_{m,n}(2|2)$. Обращая внимание на эти числа заметим, что они соседствуют с числами $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$; из которых можно составить нечетную матрицу $N_{m,n}(2 \nmid 1)$, где $m = \pi(n)$. В этих новых матрицах примечательно то, что они в строках $1 < i \leq m \leq \pi(n)$ имеют одинаковое количество нулевых и ненулевых остатков. Выясняется, что и в матрице $M_{m,n}(n+1)$ в этих же строках содержится столько же нулевых и ненулевых остатков.

Получается, что числа соответствующие столбцам матрицы $M_{m,n}(1)$, $m = \pi(n)$, умножая на 2 имеем новые матрицы в виде $N_{m,n}(2|2)$, $N_{m,n}(2 \nmid 1)$ и $M_{m,n}(n+1)$. Следовательно математические действия можно совершать не только с числами, но и с матрицами. В нашем примере матрица $N_{m,n}(2|2)$ образуется следующим образом: столбцы матрицы $M_{m,n}(1)$, которые соответствуют четным числам, остаются на своих местах и к ним добавляются столбцы матрицы $M_{m,n}(1)$, которые соответствуют нечетным числам, заранее каждый из них умножая на 2. Почти также образуются и матрицы $M_{m,n}(n+1)$ и $N_{m,n}(2 \nmid 1)$.

Возникает вопрос: каким образом и с какой закономерностью, в процессе умножения, эти нулевые и ненулевые остатки из матрицы $M_{m,n}(1)$ переходят в матрицы $N_{m,n}(2|2)$, $N_{m,n}(2 \nmid 1)$ и $M_{m,n}(n+1)$?

Конечно же с помощью формулы $L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n)$, где $L_m(j)$ и $\nu_m(j)$ – количество ненулевых и нулевых остатков столбца под номером j данной матрицы.

Но одно дело получить формулу, а другое дело понимать весь смысл этой формулы, потому что соотношение $L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n)$ затрагивает все проблемы теории чисел и, следовательно, все проблемы математики.

Возникает вопрос: как определить количество тех столбцов матрицы $M_{m,2n}(1)$, где $m = \pi(n)$, каждый из которых соответствует простому или составному числу, если число n сравнительно большое? И как они распределены в матрицах $N_{m,n}(2|2)$, $N_{m,n}(2 \nmid 1)$ и $M_{m,n}(n+1)$?

Представляя матрицу $M_{m,2n}(1)$ в виде

$$M_{m*2n}(1) = M_{m*n}(1) + M_{m*n}(n+1) = N_{m*n}(2 \nmid 1) + N_{m*n}(2|2),$$

где $m = \pi(n)$, с помощью двойного решета, получаем, что

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) + [\log_2 n]}{2} \right\rfloor - 1$$

при любом натуральном значении n и убеждаемся, что если значение n сравнительно большое, то с помощью матриц остатков можно более коротким путем определить $\pi(n)$ и $\nu(n)$.

Так как в четных столбцах матрицы $M_{m,2n}(1)$, $m = \pi(n)$, в строках $1 < i \leq m$, столько же нулевых и ненулевых остатков, сколько нулевых и ненулевых остатков имеется в нечетных столбцах этой же матрицы. Поэтому становится необходимым сопоставление этих столбцов по максимальному количеству нулевых остатков. Этим самым можем найти количество столбцов матрицы $M_{m,2n}(1)$ каждый из которых соответствует простому и составному числу.

В степенных расширенных матрицах решение этой задачи сводится к точности до единицы.

Рассматривая формулу $\nu(n(n \pm 1)) = \nu(n) + \nu(n \pm 1)$ хочется знать истинное значение функции $\nu(n^k)$, где $1 < k \leq n$, потому что запись $\nu(n^k) = \nu(n)$, которая принята в существующей математике, не внушает доверие и не раскрывает истинную сущность функции $\nu(n^k)$. Как, например, $\nu(p^2)$ показывает, что на числовой оси между числом 0 (ноль) и числом p^2 плотно расставлены p^2 единичных отрезков из которых $\pi(p^2)$ показывают количество простых чисел интервала $[0, p^2]$. И длина этих единичных отрезков равна масштабу данной числовой оси. Следовательно, число на числовой оси показывает количество отрезков, а не точек как это принято в существующей математике. Но матрицы остатков одновременно дают возможность количество отрезков выразить и через количество точек, которые с двух сторон ограничивают количество этих единичных отрезков. Поэтому составное число состоит минимум из двух простых делителей, независимо от того эти делители равны между собой или отличаются друг от друга, т.е. составное число есть комбинация простых чисел. Число n одновременно является стороной $n - 1$ квадратиков, каждый из которых можно разделить на $n - 1$ равных частей. Следовательно, $n^2 = n \times (n - 1)$, $(n + 1)^2 = n \times (n + 1)$, и нужно понять сущность этих формул, потому что, как отметили, число n показывает количество отрезков.

Аналогично получаем $n^3 = n \times n^2$, $n^4 = n^3 \times n$, $n^5 = n \times n^4$ и т.д. Такой подход к числам на числовой оси приводит к тому, что матрица остатков, которая обладает средним столбцом, обладает и противоположащими матрицами. Напомним, что:

а) матрица $M_{m,2n+2}(0_n)$, где $m = \pi(n)$, $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, называется главной матрицей числовой оси;

б) матрица, обладающая средним столбцом, называется главной матрицей;

с) подобные матрицы остатков, которые находятся на равных расстояниях от среднего столбца или от крайних столбцов главной матрицы называются противоположащими матрицами;

д) столбцы противоположащих матриц, которые находятся на равных расстояниях от среднего столбца, или от крайних столбцов главной матрицы, называются противоположащими столбцами;

е) расстояние двух столбцов, или количество единичных отрезков в матрицах остатков, равно количеству столбцов, которые находятся между этими столбцами.

Таким образом, используя свойство расширенных матриц, где $0_n = \prod_{i=1}^{m_*} p_i$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2(n+1)})$, приходим к выводу, что

$$L_{m_*}(0_n) = 0, \quad \nu_{m_*}(0_n) = \pi(n), \quad L_{m_*}(1) = \pi(n), \quad \nu_{m_*}(1) = 0.$$

Выясняется, что в статьях этого сборника мы затрагивали больше вопросов, чем на них могли ответить и придется еще многое понять и осмыслить. Но все таки так как числа $0_n - 1$ и $0_n + 1$ взаимно простые числа доказали, что среди чисел $(p+1)^2$ и p^2 есть минимум $[\log_2 p] - 1$ простых чисел и среди чисел $(2n-1)^2$ и $(2n+1)^2$ есть минимум одна пара простых чисел близнецов и т.д. Или так как наша математика 10-ричная, поэтому простые числа 2, 3 и 5 преобретают главные роли в процессе числообразования, потому что остальные простые числа вида $4x-1$ или $4x+1$. Следовательно,

- а) $\pi(p^2) = (\pi(p))^2 + \pi(p) - 1$, если простое число p вида $4x-1$;
- б) $\pi(p^2) = (\pi(p)+1)^2 + 2\pi(p) + 1$, если число p вида $4x+1$.

Выяснилось, что результаты, которые получаем с помощью матриц остатков не всегда можно получить с помощью существующей математики, потому что в ней часто игнорируется расстояние между числом 0 (ноль) и числом 1 (единица). Это приводит к непрерывности числовой оси и отрицанию отрицательных простых чисел.

Зная, что двигаясь по направлению числовой оси от точки (числа) 1 или 2 с длиной шага двух единичных отрезков, через определенное количество шагов наступит на точки $3, 5, 7, \dots, p_k$ или $4, 6, 8, \dots, 2^k$, которых называем числами, отрицает то, что двигаясь с этих же точек с такой же длиной шагов в обратном направлении числовой оси не наступит на точки $(-p_i)$ или (-2^k) . Такой не логичный подход к числам на числовой оси постепенно накапливает проблемы решение которых становится невозможным в пределах существующей математики.

Вместо того, чтобы выяснить причину появления этих проблем в различных разделах математики, нас кормят понятиями неопределенного характера, как например: иррациональные, трансцендентные, мнимые числа. Полностью не разобравшись в сумме и разности чисел на числовой оси, рассматриваются скалярные и векторные суммы и произведения, вплоть до тригонометрических сумм, не отмечая чем они отличаются от тригонометрических разностей и произведений.

В итоге квадрат делится на четыре части, на которых четные и нечетные числа рассматриваются как четные и нечетные функции, которые в различных четвертях получают эквивалентные значения с различными закономерностями и, которые решение математических задач на этих четвертях более затрудняют, чем разъясняют. Получаем, что тригонометрические уравнения не нужно путать с алгебраическими и, что они ничего общего не имеют.

Одни и те же вещи называя различными именами думает, что эти вещи поменяют свои сущности. Конечно числа не умеют говорить и не могут защитить свои права, но числовая ось для них стала конституцией и мы должны понять структуру числовой оси и раскрыть роль любого числа в этой структуре.

В высшей алгебре пытались это сделать с помощью детерминантов, подматрицами и миноров. Но это привело к большим затруднениям, потому что не учитывалось расстояние между числом 0 (ноль) и числом 1 (единица) - масштаб числовой оси.

Матричная математика учитывает это упущение и пытается со всей силой завершить эту работу успешно. Ясно, что она с помощью подобных матриц моделирует числовые процессы на различных интервалах числовой оси и, сопоставляя их с матрицами $M_{m,n}(1)$ и $M_{m,2n}(1)$, где $m = \pi(n)$, определяет количество простообразных столбцов (четных и нечетных) в матрицах $M_{m,N}(1)$ и $M_{m,2N}(1)$, где $N \gg n$, потому что любая числовая проблема сводится к проблеме определения простых и составных чисел на числовом отрезке целых чисел $[1, N]$ или $[1, 2N]$. Зная, что матрица $M_{m,n^k}(1)$ при $2 \nmid n$, обладает средним столбцом, с помощью формул

$$n = [\log_2 N], \quad n = [\log_n n^N], \quad n = [\log_n n^n]$$

определяются $\pi(N)$ и $\nu(N)$. И если средний столбец этой матрицы соответствует числу λ^* , то тогда столбцы этой матрицы, которые соответствуют числам 2^s , $1 < 2^s \leq n$ в матрице $M_{m,n}(n^k - 2n)$ будут соответствовать числам p_k^* , где $n^{k-1} < p_k^* < n^k$, потому что точки p^* и 2^s , которые представляются числами по отношению среднего столбца (числа) λ^* противолежащие. Функция $\pi(n^k)$ зависит от конкретных значений n и k и в случае $2 \leq k \leq n \leq n^2$ получаем

$$\pi(n^{2k}) = (\pi(n))^k + \begin{cases} 3[\log_2 n] - 1, \\ \pi(n) - 1. \end{cases}$$

Так же можно получить значение функции $\pi(2^{2n})$ и $\pi(2^{4n})$.

Таким образом, с помощью матриц остатков решаем проблему криптографии полнотой и делимостью отрезка длиной $[0, 10^{10}]$ или $[1, 10^{10} - 1]$ на равные части. Так как $10^{10} = 10^9 \cdot 10$, $10^9 = 10^{10} : 10$ и $10^9 = 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3$, приходим к выводу, что среди чисел $1000 = 10^3$ есть 333 числа каждый из которых кратно 3-м и 666 чисел которые при делении на 3 дает в остатке 1 или 2. Следовательно, среди точек $[0, 10^{10}]$ или $[1, 10^{10} - 1]$ есть $3 \cdot 10^9$ точек которые называются числами. Это означает, что любой отрезок числовой оси, любой длины, можно разделить максимум на $3 \cdot 10^9$ равных частей, независимо от масштаба и от местонахождения этого отрезка на данной числовой оси.

На языке физики это означает, что энергию, как и отрезок, можно разделить не более чем $3 \cdot 10^9$ равных частей. Следовательно, средняя скорость светового кванта в космическом пространстве, по всем направлениям, равно $3 \cdot 10^9$ м/сек. Но так как Земля по орбите движется со скоростью $\approx 3 \cdot 10^4$ м/сек, учитывая, что фокусы орбиты тоже перемещаются, поэтому в земных условиях скорость света становится $\approx 3 \cdot 10^8$ м/сек независимо от метода ее определения. Также определяются ускорение свободного падения, космические скорости и т.д., значения которых тоже относительные и приблизительные, потому что они обусловлены и “побочными параметрами”.

Кроме того, логарифмируя число 10^{10} по основаниям 3, 5, 7 и, учитывая что среди чисел $[1, 10]$ есть две пары простых чисел близнецов, с помощью матриц остатков и методом двойного решета получаем, что на отрезке чисел $[1, 10^{10}]$ есть 2^{10} пар простых чисел близнецов и 4^{10} простых чисел.

Представляя матрицу $M_{m*10^{10}}(1)$ в виде матричной суммы

$$M_{m*10^{10}}(1) = N_{m*10^9}(2 \uparrow 1) + N_{m*10^9}(2|2)$$

нам удастся десятиричную систему расчета свести к двоичной системе, облегчая при этом решение многих (если не сказать всех) проблем, которые возникают из-за математических процессов на числовой оси.

Спрашивается, можно ли взаимодействие реальных объектов моделировать так же как моделируются числа с помощью матриц остатков и изучая их получить реальные результаты?

Конечно можно. Этим занимались исследователи со времен Архимеда и еще раньше. Об этом свидетельствуют старинные задачи и “головоломки”, которые решаются не традиционными методами математики.

Но при взаимодействии с реальными объектами возникают “побочные” параметры, которые затрудняют не только решение задачи, но и понимание истинной сущности этого решения. Как например: если тело двигаясь из точки A через некоторый промежуток времени наступает на точку B и нужно определить среднюю скорость или среднее ускорение этого движения. Если даже пренебрегаем характеристиками движущегося тела и среды, т.е. идеализируем движение, то все равно сталкиваемся

с проблемами делимости вектора перемещения и вектора времени, особенно тогда, когда слово идет о мгновенной скорости и мгновенном ускорении. Так как вектор времени всегда направлен с прошлого в будущее и пока не выяснена истинная сущность мгновенной скорости и особенно мгновенного ускорения, невозможно подтвердить, что взаимодействие реальных объектов прошлого могут быть эквивалентными и в будущем. Конечно, среднюю скорость и ускорение при таком движении определяем с помощью вектора перемещения и времени. Но разве это дает нам основание утверждать, что скорость прямо пропорциональна перемещению и обратно пропорциональна времени? Я еще не говорю про ускорение. Конечно нет, потому что скорость и ускорение возникают при проявлении некоторой силы, наполняющая тело энергией – потенциальной и кинетической, которая закреплена законом сохранения энергии и намекает об ограниченности энергии, которая получает движущее тело.

Зависимость скорости от перемещения и времени такая же, как зависимость сопротивления проводника от напряжения и силы тока в действующей электрической цепи. Ведь физик не скажет, что сопротивление проводника прямо пропорционально напряжению и обратно пропорционально силе тока. Все знают что сопротивление проводника зависит от конфигурации, от материала проводника и от температуры. Так что зависимость скорости от перемещения и от времени в отдельности, “мнимая” и для некоторых исследователей принимается за “действительное” для объяснения каких-то других вопросов. Как, например, действительное и мнимое изображение предметов в сферических зеркалах используется для объяснения процессов изображений. Поэтому не исключены случаи, когда изображение принимается за предмет, особенно тогда, когда наблюдатель не может видеть предмет. Известно, что не все небесные тела видны земному наблюдателю, а различные слои космического пространства для нас становятся сферическими зеркалами и, возможно, увидев изображение тел, которых невозможно видеть с земной поверхности, мы думаем, что они какие-то массивные тела.

В начале 20-го века А. Эйнштейн опираясь на работы Галилея, Ньютона и многих других ученых создал свою “Специальную теорию относительности” и смог объяснить не только движение броуновских частиц, фотоэффект, кватование, но и расщепление атомных ядер. Этим самым он расширил область интеллектуального познания человечества. Но это не значит, что эта чисто математическая теория доказывает, что перемещение или время зависимы от скорости движущегося тела. Он просто показал, что “Специальная теория относительности” отличается от относительности Галилея тем же, чем реальное число отличается от мнимого. Исходя из того, что делимость энергии на равные части так же ограничена, как и делимость отрезка на числовой оси, Эйнштейн энергию фотона приравнивал к его мгновенной скорости и “невольно” создал понятие отрицательной энергии и отрицательного времени, которые, как например “Проблема близнецов”, стали предметом для “споров” многих маститых ученых и в настоящее время.

Чувствуя значимость промежутков времени во взаимодействиях реальных объектов, которые безуданно движутся в инерциальных системах относительно друг друга, Эйнштейн (и не только он) пришел к понятию тензоров. Но почти полвека работая над “Теорией поля” добился многого в этом направлении, но не смог его завершить. Может из-за того, что наши знания о вселенной, пространстве и времени настолько малы, что не можем прийти к объективным заключениям относительно них? А может из-за того что не смогли количество составных чисел отрезка $[1, n^2]$ выразить через $\pi(n)$? Матрицы остатков вынуждают нас задуматься над этими вопросами, потому что “Теория матриц остатков” разъясняет не только количество простых чисел $\pi(\sqrt{N})$

и $\pi(N) - \pi(\sqrt{N})$, но и количество чисел вида $[\log_2 N]$ и $[\log_2 2^N]$.

Рассматривая реальные взаимодействия реальных объектов не нужно забывать, что математика не всемогущая и она нам дает только количественную информацию. Качественные свойства этой информации мы получаем анализируя эти взаимодействия. Поэтому любой раздел любой науки развивается опираясь на конкретные аксиомы или постулаты, которые являются обобщением интеллектуального потенциала человечества.

Аксиомы или постулаты не догмы и со временем расширяются охватывая новые явления, которые до этого не замечались или не встречались. Свидетельство этому могут служить геометрия Лобачевского и Римана, постулаты Бора и неопределенности Гейзенберга и т.д.

В математике основная аксиома появилась после принятия координатных систем, как число 0 (ноль) кратно всем целым числам, а для реальных взаимодействий реальных объектов она приняла вид “Большого Взрыва”, которая стала основой теории расширяющихся галактик.

Теория матриц остатков привела математику к инвариантности числовых процессов, к чему она приведет реальные взаимодействия реальных объектов, нужно еще выяснить:

- а) *какая часть сообщающей энергии для тела становится потенциальной и какая часть перемещает его;*
- б) *зависимость составляющих данного вектора от различных направлений;*
- с) *перемещение тела в космическом пространстве плавное или скачками;*
- д) *основополагающая формула, описывающая реальные взаимодействия реальных объектов, для исследователя является постулатом или законом*

и т.д.

Весь вопрос в том, что принимая стороны квадрата за отрезки прямой, его диагональ становится зигзагообразной линией или наоборот.

Если окружность считаем плавной линией, то его диаметр становится скачкообразной или наоборот.

Поэтому бесконечное расширение, или бесконечное сужение мироздания не только трудно себе представить, но и трудно объяснить словами или описать формулами.

Ереван, 2021.

P.S. Уважаемый читатель, если не можете ответить на вопрос, который написан на обложке этой книги, придется Вам еще раз, более внимательно, прочитать все статьи этого сборника.

Book composed, edited
and prepared for printing
Larisa Ashot Elbakyan.

RESIDUE MATRIX THEORY

A new method for studying mathematical problems has been developed that uses the concept of number. It is based on the concept of a “residual matrix”. The elements of these matrices are the remainders of the division of some sets of natural numbers by prime numbers. The structure of such matrices is studied in detail, the regularities of the distribution of zero and non-zero remainders in them are established. The connections between the matrices of residuals corresponding to different sets of natural numbers are studied. The remainder matrix method is applied to solve a number of problems in number theory. In particular, theorems are proved that describe the distribution of primes on the number axis. Derived formulas for the prime numbers of Mersenne and Fermat, as well as other formulas for prime numbers. The problems of Schinzel and Goldbach are investigated. A method for finding solutions to the Sierpinski-Erdős equation is proposed. The problem of cryptography has been completely solved and can become the basis for creating new computers that can solve any problem 10^4 or 10^5 times faster than existing ones. Any chapter of this collection can become the basis for an entire section of number theory and, therefore, mathematics.

Contents

From author	7
From translator	9
INTRODUCTION	11
1. About some problems of distribution of prime numbers	13
1.1. Introduction	13
1.2. Residual matrices	13
1.3. Similar residual matrices	15
1.4. Conjugate residual matrices	17
1.5. Application of residual matrices	18
2. About the estimation of the number of prime numbers in certain intervals	21
2.1. Conjugate residual matrices	21
2.2. Application of residual matrices	22
2.3. Conjugate residual matrices for the second row and their applications	23
3. About some problems of prime numbers	25
3.1. Introduction	25
3.2. Theorems	25
4. About prime and coprime numbers in special intervals I	29
4.1. Introduction	29
4.2. Conjugate residual matrices	29
4.3. Residual matrices with step 2	30
4.4. Applying residual matrices with step 2	32
5. About prime and coprime numbers in special intervals II	35
5.1. Introduction	35
5.2. Residual matrices	36
5.3. Conjugate residual matrices	37
5.4. Residual matrices with step 2	38
5.5. The main theorem	40
6. Adjacent residual matrices and sieve method	43
6.1. Introduction	43
6.2. Residual matrices, columns without zeros	43
6.3. Adjacent residual matrices	44
7. Residual matrices and Schinzel's problem	47
7.1. Residual matrices with step 2	47
7.2. Extended residual matrices	48
7.3. Esh ẽ times about prime and coprime numbers in special intervals	49
7.4. Symmetric residual matrices, symmetry of numbers on number axis	52
7.5. Shinzel's problem	52

8. Goldbach problem	55
8.1. Introduction	55
8.2. Residual matrices	55
8.3. The middle column of the residual matrix and its properties	56
8.4. The middle column of a matrix and the Goldbach problem	57
9. Properties of residual matrices	61
10. Square matrices. Focuses for residual matrices	63
11. Average matrix of residuals. Symmetric matrices	67
12. Prime numbers in specific ranges of numbers, and score their numbers on both sides	71
13. Power matrices of residuals	77
14. Focuses and focal lengths in residual matrices	81
14.1. Introduction	81
14.2. Focal lengths in residual matrices	81
15. Twin Prime Problems	83
16. Division of numbers on the numerical axis	87
17. The $\pi(n)$ function and the cryptography problem	89
18. Commensurable and incommensurable segments	95
19. Opposite and shifted residual matrices	97
20. Double sieve	99
21. Distance of columns in residual matrices	107
22. Number formation on the numeric axis	109
23. Main and side focuses of residual matrices	113
24. Decay of the number axis. Simple matrices	117
25. Simple numbers and combinatorics	123
26. Conclusion	129
27. The true nature of the natural zero (O_n) and functions $c(m, n, n + 1)$	135
27.1. Introduction	135
27.2. Expansion of matrices. Function $c(m, n, n + 1)$ in residual matrices	135
28. Square residual matrices	139
29. Side and average residual matrices. Symmetric matrices	143
30. Combinatorics on the number axis	149
31. Potential primes and equations	153
32. Complete and adjacent residual matrices	159
33. Generalization in the form of a belated introduction	167
34. Time to collect stones	169

From author

Time for the math

got along with integers only Since my school days, I noticed that in mathematics on the number axis, not everything is logically justified. For example, I could not comprehend in any way how the square of a negative number becomes positive, and $0! = 1$. In his student years, these doubts intensified, especially when he got acquainted with theoretical physics.

The transformation of a regular inscribed polygon into a circle by doubling the number of its sides is something similar to when the stars are taken as a point. The concepts of “infinitely small” and “infinitely large”, which led to the continuity of the number axis and the creation of differential and integral calculus, are only suitable for solving everyday problems. They become helpless when questions of “infinitesimal” and “infinitely large” are raised because the discontinuity of the number axis is ignored.

Scientists such as Lorenz, Heaviside, Hadamard and Poincaré noticed the relativity of the results of mathematical operations on the number axis, which formed the basis of Einstein’s theory of relativity. But so far no one has succeeded in getting out of the “vicious circle” of existing mathematics caused by the continuity of the number axis.

Mathematics, on the one hand, denies the existence of the largest number, proves the infinity of primes, and on the other hand, takes the number zero to be a multiple of all integers. Many mathematicians (Rashevsky, Rvachev) disagree with this and with the concept of infinity based on Archimedes’ axiom.

Therefore, we decided, leaving the Archimedes’ axiom inviolable, to create a new theory, which, following the famous mathematician Askold Ivanovich Vinogradov (Petersburg, LOMI), we call matrix mathematics. The basis of matrix mathematics is the statement about the difference between a number and its ordinal number on the number axis. We believe that only prime and composite numbers exist on the number axis. The rest (fractional, irrational, imaginary, etc.) are distorted representations of integers, and only points on the number axis, given the relativity of the choice of the origin. This collection of articles consists of individual chapters arranged historically as they were written. Unfortunately, due to lack of time, many questions of matrix mathematics (for example, estimates of the $\pi(x)$ function, power matrices of residuals, focal lengths in matrices, Fermat’s theorems, problems of cryptography, etc.) remained outside the scope of this collection.... I hope to write more about them in the second part of this book, and if I don’t have time, it will be written by the next generations. This collection is intended for readers interested in mathematics. The material is presented to the public and is extremely simple. But one should not read it as fiction, since the collection touches upon the foundations of a new approach to existing mathematics, so each phrase requires deep reflection. You should proceed to the next article only after bringing the studied to a common denominator. Matrix mathematics

is an alternative to existing mathematics. If it seems to the reader that some of the statements are dubious and poorly proven, the notation is unsuccessful, the expressions are not very smoothly designed, let him forgive. My works may not be smoothly decorated, but in my opinion they cannot be wrong. I am deeply grateful to Academician of the National Academy of Sciences of the RA M. RA, Yerevan) for valuable advice and critical remarks. Yerevan, 2013

References

- [1] P.K. Rashevsky "On the dogma of the natural series": Success Mat. Science, vol. 28, no. 4 (172), pp. 243-246, 1973. [2] V.L. Rvachev "Non-Archimedean arithmetic and other constructive means of mathematics based on the ideas of the special theory of relativity": Reports of the Academy of Sciences of the USSR, vol. 316, no. 4, 1991.

From translator

The monograph by E.L. Mkrtumyana is published in two versions: in Russian and in English. It combines I and II parts of the collection "MATRIX MATHEMATICS". It outlines a new approach to the study of mathematical problems - the method of residual matrices. The elements of these matrices are the remainders after dividing some sequence of natural numbers by prime numbers. The structure of such matrices is studied in detail. In particular, the distribution of zero and non-zero remainders in them is analyzed. The developed methods are used to solve a number of problems in number theory. First of all, to find the distribution of prime numbers on different segments of the numerical axis. Each such segment is associated with its own matrix of residuals, and the numbers of zero and nonzero residues in the matrices associated with different segments are compared. This allows you to compare the number of primes in these segments. The principle and method of such a comparison is formulated in Theorem 1.4. Most of the results presented in this monograph were obtained by applying this method to various segments of the number axis. A number of inequalities are proved that compare the number of primes on different segments of the numerical axis. Using the methods of residual matrices, formulas for the prime numbers of Mersenne and Fermat are derived, as well as other formulas for the distribution of primes. The problems of Shinzel and Goldbach are investigated, and a method is proposed for finding solutions of an equation like the Sierpinski-Erdős equation. A generalization of the sieve method - a double sieve is proposed. In general, the results presented in this monograph show that the residual matrix method allows one to identify a number of new patterns in the structure of the number axis. V.A. Andreev Moscow, 2019

Introduction

Mathematician looking for truth with numerical axis continuity, like a blind squirrel, that runs tirelessly in the ferris wheel and thinks it will soon reach the end of the world. In our minds addition means adding to a certain

number of objects a certain number of other similar (sometimes not such) objects, getting their total sum. In this case, it is not taken into account from what subject and in what direction the addition was carried out. On the numerical axis, the addition of objects is done as follows: it is believed that these objects are located along one virtual straight line, they must be added from the right end to the right, replacing the objects with identical densely spaced segments of unit length. As a result, we get a point that is distant from the beginning of the numerical axis by a certain number of segments of unit length. This begs the question: is the beginning of the number axis a point or a number? The answer to this question is not unambiguous, because the number n on the number axis is characterized by $n + 1$ points. The existing mathematics does not answer this question clearly. Nor does it answer the questions: what will become of this amount if you change the origin or scale of the numerical axis? He does not answer because he does not distinguish between the beginning of the numerical axis and the beginning of the calculation, forgetting that the beginning of the numerical axis is only a point, and the beginning of the calculation is the first object (segment) from which the calculation begins, and the number 1 is located from the number 0 at the same distance, as the number 2 from the number 1, or the number $n + 1$ from the number n . The absence of a difference between the beginning of the numerical axis from the beginning of the calculation leads to the appearance on the numerical axis of fractional, irrational, transcendental, complex numbers and imaginary roots of equations. This is the main drawback of existing mathematics, which leads to the fact that the results of mathematical operations on the number axis become non-commutative, i.e. relative. Using radius vectors, focal lengths, quantum dualism, etc. physicists tried in every possible way to “smooth out” the ailments of mathematics and achieved noticeable successes. Of course, they were helped by experimental data, but mathematics remained at the “primitive level”. Since even numbers (relative to the beginning of the number axis) relative to odd numbers are moved one unit to the right (or to the left, depending on which direction to look), therefore mathematics on the number axis has become one-sided, and mathematical actions have acquired a direction (for example: addition and multiplication - to the right, and subtraction and division to the left). It is completely incomprehensible to me whether the number “minus” $2n$ is even or odd ?! After all, the minus sign only shows the direction! And $2n$ consecutive natural numbers show that among them there are n even and n odd numbers, and nothing else.

Logic, according to which 0 is a multiple of all numbers ($0! = 1$), dividing numbers

reduces to dividing the unit of the scale of the numerical axis, i.e. considering the number of points in a unit segment to be innumerable, it is assumed that $1 = \text{“infinity”}$! A one-sided approach to zero as a number turned it into a fiction, and the numbers on the number axis became equal.

Matrix mathematics is free from these shortcomings, in which the global concept of natural zero $O_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$ is introduced. In matrix mathematics, by limiting a segment of a number axis, the behavior of mathematical operations on this segment is determined, and then they are extended to large segments. For this, in matrix mathematics, the fundamental concept of a *matrix of residuals* has been created, where the zero remainder is no longer a fiction, but a real object.

In order for even and odd numbers to be located symmetrically with respect to some point in matrix mathematics, a matrix of residuals with an odd number of columns is considered. The middle column of such a matrix becomes the axis of symmetry. In matrix mathematics, the matrix $M_{m,2n+2}(O_n)$ is of fundamental importance, where $m = \pi(n)$, the end columns of which correspond to the numbers O_n and $2n$, and the middle column is n , the parity of which does not always depend on the parity of the outermost columns. Therefore, matrix mathematics shows that parity on the number axis is a relative concept, which leads to the relativity of all mathematical operations on the number axis.

Matrix mathematics tries to develop mathematics on the number axis according to the logic of mathematics itself, and not according to the logic of the greatest mathematicians!

Chapter 1

On some prime number distribution problems

This article is devoted to the study of some of the problems distribution of prime numbers. The study is carried out by the method residual matrices, which is developed by the author.

1.1 Introduction

On the estimation of the difference [1]

$$\pi(n^2 + n) - \pi(n^2), \quad (1.1)$$

where n is an integer, the function $\pi(n)$ is the number of primes, not exceeding n , nothing is known, it is not even known that

$$\pi(n^2 + n) - \pi(n^2) \geq 1. \quad (1.2)$$

But we don't think that experts have dealt with this issue a little, so as the references often talks about him [2,3].

It is known from the history of mathematics how much time and labor was required to prove Bertrand's postulate [4]

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq 1. \quad (1.3)$$

It can be seen that the estimates (1.2) and (1.3) are closely related.

As you can see from the above, number theory needs a new approach to problems of distribution of prime numbers.

In our opinion, the method remainder matrices [5], which many questions of additive theory numbers leads to one plane.

The purpose of this article is to use a new method to prove (1.3) and evaluate (1.1) from below.

1.2 Residual matrices

Consider the following matrix, which we call the remainder matrix:

$$M_{m,n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

where $a_{i,j}$ is the remainder of the division of the number $\lambda_j = \lambda + j - 1$ by P_i , P_i is the i -th prime, $\lambda \geq 0$ is an integer number, $n \geq 2$ - natural number, $m = \pi(n)$ - amount primes not exceeding n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. For example, for $n = 7$, $\lambda = 0$, we have $m = 4$ and

$$M_{m,7}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

And for $\lambda = 1$, $n = 7$, the matrix $M_{4,7}(1)$ has the form

$$M_{4,7}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Here the first auxiliary row contains the numbers $\lambda_j = \lambda + j - 1$, and the first auxiliary column contains the primes P_j . $a_{i,j}$ is the remainder of dividing the number $\lambda_j = \lambda + j - 1$ by P_i . The following theorems hold.

Theorem 1.1 For any natural number n

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n),$$

where $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ is the number of zero elements (zeros) matrices $M_{m,n}(\lambda)$, $\nu(n)$ is the number of different prime divisors of n .

Proof. Matrix comparison $M_{m,n}(0)$ and $M_{m,n}(1)$ shows that the j -th column of the matrix $M_{m,n}(0)$ starting from the second column, coincides with the $j - 1$ th column of the matrix $M_{m,n}(1)$. Moreover, in the matrix $M_{m,n}(0)$ the first column differs from all columns of the matrix $M_{m,n}(1)$, and the last column $M_{m,n}(1)$ differs from all columns of the matrix $M_{m,n}(0)$. The first column of the matrix $M_{m,n}(0)$ contains $\pi(n)$ zeros, and the last column of the matrix $M_{m,n}(1)$ contains $\nu(n)$ zeros, hence,

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n).$$

Theorem 1.2 For any integer $\lambda \geq 0$

$$\overline{M}_{m,n}(0, i) \geq \overline{M}_{m,n}(\lambda, i) \geq \overline{M}_{m,n}(1, i),$$

where $\overline{M}_{m,n}(\lambda, i)$ is the number of zeros of the i -th row of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$.

Proof. It is easy to see that

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(0, i), \quad \text{if } \lambda + a_i \equiv 0(\text{mod } P_i), \lambda + n - b_i \equiv 0(\text{mod } P_i),$$

$$0 \leq a_i < \frac{P_i - 1}{2}, \quad 0 \leq b_i < \frac{P_i - 1}{2},$$

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(1, i), \quad \text{if } \lambda + a_i \equiv 0(\text{mod } P_i), \lambda + n - b_i \equiv 0(\text{mod } P_i),$$

$$a_i > \frac{P_i - 1}{2}, \quad b_i > \frac{P_i - 1}{2}.$$

Therefore, the theorem is proved.

Corollary 1.1

$$\overline{M}_{m,n}(1) \leq \overline{M}_{m,n}(\lambda) \leq \overline{M}_{m,n}(0).$$

Proof follows from the equalities:

$$\sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(1, i) = \overline{M}_{m,n}(1), \quad \sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(\lambda),$$

$$\sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(0, i) = \overline{M}_{m,n}(0).$$

Denoting

$$c(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1), \tag{1.4}$$

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) = \pi(n) - c(m, n, \lambda) - \nu(n), \tag{1.5}$$

We get

$$0 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

1.3 Similar residual matrices

Definition 1.1 Two matrices are called similar if they have the same width $m = \pi(n)$ and length n .

For example, similar are the matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(\lambda)$. In what follows, we put $n \leq \lambda$. We arrange in matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(\lambda)$ columns by the maximum selection of zeros from right to left. Then, among the selected k columns, there is no column containing fewer zeros than any unselected column.

We denote by $\overline{M}_{m,n}^k(\lambda)$ the total number of zero residuals k of the columns of this matrix.

The theorem holds.

Theorem 1.3 For any integer $\lambda \geq n$

$$\overline{M}_{m,n}^k(\lambda) - \overline{M}_{m,n}^k(1) \geq 0$$

Proof. From Theorems 1.1 and 1.2 we had that

$$0 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

1) If $c(m, n, \lambda) > 0$, then the theorem is trivial, since in the matrix $M_{m,n}(1)$ all columns except the first contain at least one zero remainder.

2) If $c(m, n, \lambda) = 0$, then $c^*(m, n, \lambda) = 0$, where $c^*(m, n, \lambda)$ is counted only by lines $1 \leq i \leq m$. Hence,

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda; i) - \overline{M}_{m,n}(1; i) = 0.$$

But this is impossible, since λ and $\lambda + n - 1$ are jointly multiples of all prime divisors of n . In fact, for $n = 3$, $\lambda = 4$, $c(m, n, \lambda) = 0$, but if $\lambda > 4$, then $c^*(m, n, \lambda) \neq 0$. The theorem is proved.

Here are some corollaries of Theorem 1.3. Consider the matrix $M_{m,n}(1)$. We denote by $L_m(j)$ the number of nonzero remainders, and by $\nu_m^*(j)$ the number of zero remainders in the j -th column of the matrix $M_{m,n}(1)$. It is easy to see that

$$L_m(j) = \pi(n) - \nu_m^*(j), \quad L_m(1) = \pi(n) = m. \quad (1.6)$$

We denote by $\bar{L}_{m,n}(\lambda)$ the number of nonzero remainders of the entire matrix $M_{m,n}(\lambda)$. Then one can prove that

$$\bar{L}_{m,n}(1) - \bar{L}_{m,n}(O_n) = \pi(n) - \nu(n),$$

where O_n is a natural zero, $O_n = \prod_{i=1}^m p_i$. It is easy to see that

$$\bar{L}_{m,n}(1) - \bar{L}_{m,n}(\lambda) = \pi(n) - c(m, n, \lambda).$$

Theorem 1.4 *In the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, where $8 < n < \lambda \leq n^2$, $m = \pi(n)$, $(\lambda, n) = \nu(n)$ there are at least $\left\lceil \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rceil - \nu(n)$ columns, each of which has no zeros in rows $1 \leq i \leq m = \pi(n)$, i.e. correspond to prime numbers.*

Proof. Consider similar matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(1)$, where $8 < n < \lambda \leq n^2$, $m = \pi(n)$. We cross out all those columns of the matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(1)$, in which there is at least one zero in the rows $1 < i \leq m = \pi(n)$. Then, for the matrix $M_{m,n}(1)$, only the columns with zero in the first row and the first column will remain uncrossed, i.e. they correspond to numbers of the form 2^x . And there are exactly $k_1^* = [\log_2 n] + 1$ such numbers among the first n numbers. Therefore, the matrix $M_{m,n}(1)$ has $k_1 = n - [\log_2 n] - 1$ columns crossed out.

We denote by k_2^* the number of uncrossed columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, and by k_2 - the number of crossed out columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$. Obviously, $k_2 = n - k_2^*$. If $k_2 \leq k_1$, then $k_2^* \geq k_1^* = [\log_2 n] + 1$ and even more so $k_2^* \geq \left\lceil \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rceil - \nu(n)$ and the theorem is fulfilled.

Now let's say $k_2 > k_1$. Then $k_2^* < k_1^*$. We arrange in matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(\lambda)$ columns by the maximum selection of zeros from right to left so that the uncrossed columns are located first, and then the crossed out columns. Since for odd n and even λ the number of even columns (corresponding to even numbers) matrix $M_{m,n}(\lambda)$ is 1 more than the number of even columns of matrix $M_{m,n}(1)$ and in matrix $M_{m,n}(\lambda)$ the number of columns with at least one zero in rows $1 < i \leq m = \pi(n)$ cannot be more than $n - \frac{[\log_2 n]}{2} + \nu(n)$, comparing matrices with such an arrangement of columns, we get.

$$k_2^* \geq \left\lceil \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rceil - \nu(n).$$

The same result can be obtained in a different way. Recall that we have

$$\bar{M}_{m,n}(\lambda) - \bar{M}_{m,n}(1) = c(m, n, \lambda). \quad (a)$$

Whence it follows that

$$\bar{M}_{m,n}^{k_2}(\lambda) - \bar{M}_{m,n}^{k_1}(1) = c^*(m, n, \lambda), \quad (b)$$

where $c^*(m, n, \lambda)$ is counted only in rows $1 < i \leq m$, $k_2^* = \alpha_1 + \alpha_2$ and α_1 is the number of those columns matrices $M_{m,n}(\lambda)$ in each of which there is only one 0, and this 0 is in

the row $i \geq 1$, and α_2 is the number of empty (having no zeros) columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$. Here it is denoted by $\overline{M}_{m,n}^k(\lambda)$ the number of all zero residuals k of the columns of this matrix (including the zeros in the first row). Subtracting (b) from (a), we get

$$\alpha_1 - [\log_2 n] - 1 \leq \begin{cases} 1, & \text{for } 2 \nmid n, 2n \mid \lambda; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Assuming that each of the α_1 columns contains at least 2 zero remainders (including the zeros in the row $i = 1$), and considering that $c^*(m, n, \lambda) \leq c(m, n, \lambda) - 1$, and it is possible that the value $[\log_2 n]$ is an odd number for $2 \nmid n, 2 \mid \lambda$ we get

$$\alpha_1 \geq \left\lceil \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rceil + 1.$$

Thus

$$k_2^* - \alpha_1 = \alpha_2 \geq \left\lceil \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rceil - \nu(n).$$

Theorem 1.4 is completely proved.

To make the proofs of the theorems clearer, consider the conjugate remainder matrices.

1.4 Conjugate remainder matrices

Definition 1.2 Two matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ are called conjugate if they differ in the distribution of zeros in only one line.

In particular, we can consider such conjugate matrices, which differ in the distribution of zeros only in the first line. For example, $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ would be conjugate matrices in the first row if

$$\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad m = \pi(n).$$

The number of zero elements of the adjoint matrix $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ denote by $\overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda})$.

Definition 1.3 Columns of matrices conjugate on the first row which occupy the same places in the matrices, we call them twins. Distribution of zeros in these columns, except for the first row, the same.

Definition 1.4 A column is called corresponding to the number λ_j if the elements of this column $a_{i,j}$ were formed by dividing the given the number λ_j to the prime number P_i and vice versa.

Theorem 1.5 Empty (containing no zero) column of the matrix corresponds to a column of the adjoint matrix, which contains only one zero, and this zero is in the line $i = 1$, and vice versa.

The proof is obvious.

Theorem 1.6 The number of conjugate columns (only for the first row) of matrices, each of which contains at least one zero in lines $i > 1$, are equal to each other.

Proof. If the matrix contains at least one zero in the row $i > 1$, and in the column j , then the conjugate matrix is also in this a row and in the same column contains the same zero.

1.5 Using remainder matrices

To illustrate the advantage of the residual matrix method, first consider Bertrand's postulate, i.e. let us prove the inequality (1.3).

Consider the matrices $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\bar{1})$ and $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\bar{\lambda})$, which are in pairs are conjugated on the first line. According to clause 1.2, we can designate

$$c_1(m, n, \bar{\lambda}) = \overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda}) - \overline{M}_{m,n}(\bar{1}). \quad (1.7)$$

Let $\lambda = n + 1$, $n \geq 5$.

Let's compose the combined matrices, the columns of which are mechanical joining of twin columns of adjoint matrices. Thus, we get new matrices, we denote them $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$ and $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$ in accordance with paragraph 2, where $m^* = 2m$, $1 \leq i \leq 2m$.

The relationship between the number of zeros of these matrices is as follows:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda}) &= \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}), \\ \overline{M}_{m,n}(1) + \overline{M}_{m,n}(\bar{1}) &= \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}). \end{aligned} \quad (1.8)$$

According to (1.4) and (1.7)

$$2c^*(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}), \quad (1.9)$$

where $c^*(m, n, \lambda)$ is calculated only for the lines $i > 1$, $i \neq m + 1$, and as for rows $i = 1$, $i = m + 1$, the combined matrices contain the same number of (n) zeros and in the difference (1.9) destroy each other.

Let the symbol $\overline{M}_{m,n}^k(\lambda)$ denote the number of all zeros of k columns of the given matrix.

Theorem 1.7 For any natural number $n = \lfloor \log_2 \lambda \rfloor$,

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lfloor \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} \right\rfloor - 1,$$

where $\lfloor \log_2 n \rfloor$ denotes the integer part of $\log_2 n$.

Proof. Suppose $\lambda = n + 1$, k_2 is the number of those columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, each of which in rows $i > 1$ contains at least one zero. It is clear that k_2 is equal to and the number of the same columns of the matrix $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ (see definition 1.4).

Similarly, the number of the same columns for matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(\bar{1})$ is denoted by k_1 . Then, as a consequence of (1.9), we can write

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) = 2c(m, n, \lambda) + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad (1.10)$$

where α_1 is the number of those columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, each containing only one zero, and this zero in the line $i = 1$, α_2 is the number of empty ones columns of the same matrix. Since among the numbers $n + 1$, $n + 2$, $\dots$, $2n$ there is necessarily only one number of the form 2^ν , where ν - an integer, therefore $\alpha_1 = 1$. We have

$$0 \leq \alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n),$$

since if the column of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ is empty with respect to strings $i \geq 1$, then it the corresponding number is prime. In the matrix $M_{m,n}(1)$ there is only one empty column (its

corresponding number is one) and $\lfloor \log_2 n \rfloor$ columns, each of which contains only one zero and this zero in the line $i = 1$, their corresponding numbers are as follows: $2, 4, 8, \dots, 2^\nu$, where $2^\nu \leq n$.

On the other hand, the equality (1.10) can be written as

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) = 2c(m, n, \lambda) + k_2 - k_1, \quad (1.11)$$

since $\overline{M}_{m^*,n}^k(\lambda, \overline{\lambda})$ is the number of all zeros of k columns of the given matrix.

Suppose $k_2 > k_1$ (otherwise the proof of the theorem obviously) and estimate $k_2 - k_1$. Each of the matrices $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ and $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ in the lines $i = 1$ and $i = m + 1$ in total has only n zeros and $k_1 = n - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1$. Then

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) \leq 2c(m, n, \lambda) + \alpha_2 - \alpha_1. \quad (1.12)$$

We come to the same conclusion using Theorem 1.4, since the matrices $M_{m,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ and $M_{m,n}(1, \overline{1})$ is similar too.

From the equality (1.10) and the inequality (1.12), given the parity of the number $\lfloor \log_2 n \rfloor$, it follows

$$\alpha_2 \geq \left\lfloor \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} \right\rfloor - \nu(n).$$

But since $\alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n)$, we get

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lfloor \frac{\lfloor \log_2 n \rfloor + 1}{2} \right\rfloor - \nu(n).$$

Theorem 1.7 is proved.

Note. Using various methods on this issue, we have obtained strong results (see [4]). But our goal is to apply the matrix method leftovers for unsolved problems. Regarding the estimation of the difference (1.3) on both sides, then our method gives stronger results than existing.

Theorem 1.8 For any integer $x > 0$

$$\pi(x^2 + x) - \pi(x^2) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 x \right\rfloor - \nu(x).$$

Proof. Consider the matrices $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ and $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$, where

$$n = x^2, \quad m^* = 2m, \quad m = \pi(n), \quad \lambda = x + 1, \quad x \geq 1.$$

Suppose, similarly to Theorem 1.4, that k_4 shows the number columns of the matrix $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$, containing at least two zeros in the lines $i > 1$, $i \neq m + 1$, and k_3 is the number the same columns of the matrix $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$.

We can write

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_4}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_3}(1, \overline{1}) = 2c(m, n, \lambda) + \lfloor \log_2 x \rfloor + 1 - \alpha_3 - \alpha_4, \quad (1.13)$$

where $\lfloor \log_2 x \rfloor + 1$ is the number of those columns of the matrix $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ each containing only one zero and this zero in row $i = 1$ or in row $i = m + 1$ and these columns are not common with the matrix $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$, i.e. correspond to numbers from the interval $1, 2, \dots, x$.

Note that $\alpha_3 + \alpha_4$ is the number of those columns matrices $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$ that are not common with the matrix $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$ and contain only one zero and this zero in the line $i = 1$ or in the line $i = m + 1$. It is easy to verify that $\alpha_3 \leq 1$, since among the numbers $x^2 + 1, x^2 + 2, \dots, x^2 + x$ only one number can be of the form 2^ν , ν is an integer (like $(\sqrt{7})^2$ and $(\sqrt{7})^2 + \sqrt{7}$), and

$$\alpha_4 = \pi(x^2 + x) - \pi(x^2),$$

since in the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ these columns are empty (composite the number N contains a prime factor $\leq \sqrt{N}$), therefore these columns must correspond to prime numbers.

Note that the matrices also have other columns containing one zero, but they are destroyed in the difference (1.13), since they are common to both matrices.

Note that the columns numbered $x+1, x+2, \dots, x^2$ are common for both matrices and are eliminated in the difference (1.13), and matrices $M_{m^*,x}(x^2+1, x^2+\bar{1})$ and $M_{m^*,x}(1, \bar{1})$, where $m^* = 2m$, $m = \pi(n)$

Similarly to the theorem 1.7, taking into account that for integers x , among the numbers $1, 2, \dots, x^2$ there are $2[\log_2 x]$ numbers of the form $2^\nu \leq x^2$, we obtain $c(m, n, \lambda) - c^*(m, n, \lambda) = \begin{cases} \nu(x), & \text{for } 2 \nmid x \\ \nu(x) - 1, & \text{for } 2|x \end{cases}$ and

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_4}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_3}(1, \bar{1}) \leq 2c^*(m, n, \lambda) + \left\lfloor \frac{\log_2 x}{2} \right\rfloor + \nu(x). \quad (1.14)$$

Subtracting (1.14) from (1.13), we get

$$\alpha_4 \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 x \right\rfloor - \nu(x), \quad n = x^2.$$

Hence,

$$\pi(x^2 + x) - \pi(x^2) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 x \right\rfloor - \nu(x).$$

This proves Theorem 1.8.

Note that the equal sign in (1.14) only holds for $\nu(x) = \nu(x+1) = 1$.

Corollary 1.2 *Among any $2n$ consecutive numbers from the collection integers $n+1, n+2, \dots, (n+1)^2$ there are at least $\left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 n \right\rfloor - \nu(n)$ primes.*

Proof of the corollary 1.2 follows trivially from Theorems 1.4, 1.7 and 1.8.

References

- [1] Bukhshtab A. A. Number theory. M. 1966.
- [2] Gritsenko S. A. Goldbach's ternary problem and Goldbach-Waring problem with prime numbers lying in intervals of special form / UMN 1988 T. 43, No 4, S. 203–204.
- [3] Changa M. E. Prime numbers in special spaces and additive problems with such numbers // Mathematical notes. 2003, T. 73, No 3, S. 423–436.
- [4] Prakhar K. Distribution of primes M.: Nauka, 1967.
- [5] Mkrtumyan E. L. Residual matrices // Bulletin of ErGosUnt-a. 1995.No 2, S. 107–108.

Chapter 2

About estimating the number of primes in specific ranges

This article is devoted to the study of some problems of distribution of prime numbers. The study is carried out by the method of residual matrices, which was developed by the author.

We denote by $\pi(n)$ the number of primes not exceeding the integer n . On estimating the difference

$$\pi(2n) - \pi(n), \quad (2.1)$$

it is known that [1]

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{3}{5} \frac{n}{\ln n}, \quad n > 21. \quad (2.2)$$

Proust obtained the best (existing) lower bound for the difference (2.1):

$$\pi(2n) - \pi(n) > \frac{3}{5} \pi(n), \quad n \geq 40. \quad (2.3)$$

An upper bound for the difference (2.1) was obtained by Landau [2]:

$$\pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n). \quad (2.4)$$

In this article, using the method of residual matrices [3], we have improved these estimates.

2.1 Conjugate remainder matrices

Definition 2.1 *Two matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ are called conjugate if they differ in the distribution of zeros in only one line.*

In particular, we can consider such conjugate matrices, which differ in the distribution of zeros only in the first line. For example, $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ would be conjugate matrices in the first row if

$$\bar{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad m = \pi(n).$$

The number of zero elements of the adjoint matrix $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ denote by $\overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda})$.

Definition 2.2 *Columns of matrices conjugate on the first row which occupy the same places in the matrices, we call them twins. Distribution of zeros in these columns, except for the first row, the same.*

Definition 2.3 A column is called corresponding to the number λ_j if the elements of this column $a_{i,j}$ were formed by dividing the given the number λ_j to the prime number P_i and vice versa.

Theorem 2.1 Empty (containing no zero) column of the matrix corresponds to a column of the adjoint matrix, which contains only one zero, and this zero is in the line $i = 1$, and vice versa.

Proof is obvious.

Theorem 2.2 The number of conjugate columns (only for the first row) of matrices, each of which contains at least one zero in lines $i > 1$, are equal to each other.

Proof. If the matrix contains at least one zero in the row $i > 1$, and in the column j , then the conjugate matrix is also in this a row and in the same column contains the same zero.

2.2 Using remainder matrices

Consider the matrices $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\bar{1})$ and $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\bar{\lambda})$, which are in pairs are conjugated on the first line. According to clause 2.2 we can denote

$$c_1(m, n, \bar{\lambda}) = \overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda}) - \overline{M}_{m,n}(\bar{1}). \quad (2.5)$$

Let be $\lambda = n + 1$, $1 \leq n = [\log_2 \lambda]$, $m = \pi(n)$.

Let's compose the combined matrices, the columns of which are mechanical joining of twin columns of adjoint matrices. Thus, we get new matrices, we denote them $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$ and $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$ according to item 2.2, where $m^* = 2m$, $1 \leq i \leq 2m$.

The relationship between the number of zeros of these matrices is as follows:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda}) &= \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}), \\ \overline{M}_{m,n}(1) + \overline{M}_{m,n}(\bar{1}) &= \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

or

$$2c^*(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}), \quad (2.7)$$

where $c^*(m, n, \lambda)$ is calculated only for the lines $i > 1$, $i \neq m + 1$, and as for rows $i = 1$, $i = m + 1$, the combined matrices contain the same number of (n) zeros and in the difference (2.7) destroy each other.

Let the symbol $\overline{M}_{m,n}^k(\lambda)$ denote the number of all zeros of k columns of the given matrix. Let's say $\lambda = n + 1$, k_2 is the number of those columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, each of which contains at least one zero in the lines $i > 1$. It is clear that k_2 is equal to the number of the same columns of the matrix $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ (see Theorem 1.4).

Similarly, the number of the same columns for matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(\bar{1})$ is denoted by k_1 . Whereas a consequence of (2.7) we can write

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + [\log_2 n] + 1 - \alpha_1 - \alpha_2, \quad (2.8)$$

where α_1 is the number of those columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, each of which contains only one zero, α_2 is the number of empty columns of the same matrices. Since among the

numbers $n+1, n+2, \dots, 2n$ it is necessary there is only one number of the form 2^ν , where ν is an integer, hence $\alpha_1 = 1$. We have

$$0 \leq \alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n),$$

since if the column of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ is empty with respect to strings $i \geq 1$, then it the corresponding number is prime. In the matrix $M_{m,n}(1)$ there is only one empty column (its corresponding number is one) and $[\log_2 n]$ columns, each of which contains only one zero and this zero in the line $i = 1$, their corresponding numbers are as follows: $2, 4, 8, \dots, 2^\nu$, where $2^\nu \leq n$.

On the other hand, the equality (2.8) can be written as

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + k_2 - k_1, \quad (2.9)$$

since $\overline{M}_{m^*,n}^k(\lambda, \overline{\lambda})$ is the number of all zeros k of the columns of this matrix (including the zeros in the rows $i = 1, i^* = m + 1$).

Theorem 2.3 *For any integer $1 \leq n = [\log_2 \lambda]$, $m = \pi(n)$*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{\pi(n)}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} [\log_2 n] \right\rceil - 1.$$

Proof. The equality (2.9) shows that if the matrices select k_1 and k_2 columns, then

$$\begin{aligned} & \overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) \leq \\ & \leq 2c^*(m, n, \lambda) + \left(n - \frac{\pi(n)}{2} - 1 - \left\lceil \frac{1}{2} \log_2 n \right\rceil \right) - (n - [\log_2 n] - 1). \end{aligned} \quad (2.10)$$

This follows from the fact that in the matrix $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ the columns corresponding to the numbers 1 and $[\log_2 n]$ have only one zero each, and in the matrix $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$ there are exactly $\pi(2n) - \pi(n) + 1$ such columns. The rest of the columns have at least two zeros. Matching matrices for the maximum sample gives (2.10) Subtracting (2.10) from (2.8), we get

$$\alpha_2 = \pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{\pi(n)}{2} + \left\lceil \frac{1}{2} [\log_2 n] \right\rceil - 1.$$

This proves the theorem 2.3.

2.3 Conjugate remainder matrices for the second row and their applications

Definition 2.4 *The matrices $M_{m,n}(\lambda)$, $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ and $M_{m,n}(\widetilde{\lambda})$ are called conjugate in the second line if they differ in the distribution of zeros only on the second line.*

For example, $M_{m,n}(1)$, $M_{m,n}(\overline{1})$ and $M_{m,n}(\widetilde{1})$ will be conjugate matrices with respect to second line if

$$\overline{1} = 1 + 2 \prod_{i=3}^m P_i, \quad m = \pi(n),$$

$$\widetilde{1} = 1 + 4 \prod_{i=3}^m P_i.$$

Using designations similar to those in the case of conjugate matrices in the first row, for the combined matrices conjugate in on the second line, we get

$$\overline{M}_{m^*,n}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(\overline{1}) = 3c^*(m, n, \lambda), \quad (2.11)$$

where

$$\overline{M}_{m^*,n}(\overline{\lambda}) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) + \overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda}) + \overline{M}_{m^*,n}(\tilde{\lambda}).$$

Here $m^* = 3m$, and $c^*(m, n, \lambda)$ calculated only by rows $i \neq 2$.

Theorem 2.4 *For any natural number n*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{3}{5}(\pi(n) + [\log_3 n] - 1),$$

where $[\log_3 n]$ denotes the integer part of $\log_3 n$.

Proof. Let $\lambda = n + 1$ and k_1 be the number of those columns of the matrix $M_{m,n}(1)$, which with respect to $i \neq 2$ rows are not empty. Hence,

$$k_1 = n - [\log_3 n] - 1.$$

Let k_2 be the number of those columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, which are not empty, and in relation to all lines except the first contain at least one zero. Hence,

$$k_2 \leq n - \left(\pi(n) - 1 - \frac{2}{3}\alpha \right), \quad \alpha = \pi(2n) - \pi(n).$$

Then from (2.11) it follows

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(\overline{1}) = 3c^*(m, n, \lambda) + [\log_3 n] + 1 - \alpha. \quad (2.12)$$

From the definition of the combined matrices conjugate on the second row, not hard to get

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(\overline{1}) &\leq 3c^*(m, n, \lambda) + n + 1 - \pi(n) + \frac{2}{3}\alpha - (n - 1) = \\ &= 3c^*(m, n, \lambda) - \pi(n) + \frac{2}{3}\alpha + 2. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Subtracting (2.13) from (2.12), we get

$$\alpha = \pi(2n) - \pi(n) \geq \frac{3}{5}(\pi(n) + [\log_3 n] - 1).$$

This proves Theorem 2.4.

References

- [1] Janos Pintz, "Landau's problems on primes", J. Theor. Nombres, Bordeaux, vol. 21, no. 2, pp. 357-404, 2009.
- [2] Changa M.E. Prime numbers in special spaces and additive problems with such numbers // Mathematical Notes. 2003.T. 73 No 3 S. 423-436.

Chapter 3

On some prime number problems

3.1 Introduction

a) The Legendre hypothesis was formulated by Edmund Landau at International Mathematical Congress in 1912 and sounds like this ([2]): *is true that for any natural number n in the interval from n^2 to $(n+1)^2$ there is at least one simple number?*

According to article [2], as of 2009, the hypothesis Legendre is still not proven. But in [2] from the corollary of Theorem 1.8 it actually follows that

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \geq [\log_2 n] - 1, \quad (3.1)$$

where $\pi(n)$ is the number of primes not exceeding an integer n , $[\log_2 n]$ stands for integer part.

In this chapter, we prove a stronger statement

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \geq \pi(2n) - \pi(n) + \nu(n) - 1. \quad (3.2)$$

The inequality (3.2) is stronger than (3.1) for large n .

b) The estimate of the upper bound is also of interest. In the present the article proves that

$$\pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \leq \frac{\pi(n)}{2} + 1.$$

c) It is assumed that if $x, y \geq 2$ are natural numbers, then

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y). \quad (3.3)$$

This inequality was known to the ancient Chinese, although it waits until its strict proof. It was indicated in [2] that the inequality (3.3) true for $x = y$. This article solves this problem completely.

3.2 Theorems

Theorem 3.1 *For any natural number x ,*

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \geq [\log_2 x] - 1.$$

Proof. Compose the combined remainder matrices, columns which are the mechanical attachment of twin columns conjugate matrices. Thus, we get new matrices, their denote $M_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda})$ and $M_{m^*,n}(1, \bar{1})$, where $n = x^2$, $m^* = \pi(x^2)$, $\lambda = x+1$.

We have (see [2])

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) &= 2c^*(m, n, \lambda) + [\log_2 x] + 1 - \alpha, \\ \alpha &= \pi(x+1)^2 - \pi(x^2), \end{aligned} \quad (3.4)$$

where k_1 is the number of those columns of the matrix $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$, each of which contains at least 2 zeros in rows $i \neq 1$, $i \neq m+1$, $i \neq m+2$, and k_2 is the number of the same columns of the matrix $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$. It's not hard to get that

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \overline{1}) \leq 2c^*(m, n, \lambda) + 2. \quad (3.5)$$

Note that the symbol $\overline{M}_{m^*,n}^k(\lambda, \overline{\lambda})$ shows the number of all zeros in k columns, and the columns corresponding to e numbers $2x+1, 2x+2, \dots, x^2$ are common and in the difference are eliminated. Therefore, matching the matrices $M_{m^*,n}(1, \overline{1})$ and $M_{m^*,n}(\lambda, \overline{\lambda})$, where $m = \pi(n)$, $n = x^2$, leads to a comparison of matrices $M_{m^*,2x}(1, \overline{1})$ and $M_{m^*,2x}(x^2+1, \overline{x^2+1})$, where $m^* = \pi(n)$.

Subtracting (3.5) from (3.4) we get

$$\alpha \geq [\log_2 x] - 1.$$

Note that α is the number of primes between $(x+1)^2$ and x^2 , which proves Theorem 3.1.

Theorem 3.2 *For any natural number x ,*

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \geq \pi(2x) - \pi(x) + \nu(x) - 1.$$

Proof. Consider the remainder matrix with the rows P_k excluded, $x < P_k < 2x$ (we call this matrix a restricted one). Then in the restricted matrix $M_{m,n}(1)$, where $n = x^2$, $m = \pi(x^2) - \pi(2x) + \pi(x)$, empty columns whose numbers correspond to the numbers P_k , $\lambda = 2x+1$.

Consider also the adjoint reduced remainder matrix for the second row. From the results of Chapter 2 we have

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_4}(\overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_3}(\overline{1}) = 3c^*(m, n, \lambda) + \pi(2n) - \pi(n) + [\log_3 n] + 1 - \alpha. \quad (3.6)$$

where k_4 is the number of those columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, each of which contains zeros in the rows $i = k$, the difference is $c^*(m, n, \lambda)$ is not counted by lines $i \neq 2$, $i \neq k$. Similarly, the number of the same columns for the matrix $M_{m,n}(1)$ denote by k_3 . Here, too, the columns corresponding to e numbers $2x+1, 2x+2, \dots, x^2$ are common and are eliminated in the difference. Since the left side (3.6) is difference, then shrinking matrices does not affect the number of primes between x^2 and $(x+1)^2$, whence (3.6) follows.

It is known from the theory of residual matrices that

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_4}(\lambda, \overline{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_3}(1, \overline{1}) \leq 3c^*(m, n, \lambda) - \nu(n) + 2 + [\log_3 n], \quad (3.7)$$

where $n = x^2$, $m = \pi(x^2) - \pi(2x) + \pi(x)$. Subtracting (3.7) from (3.6), we get

$$\alpha \geq \pi(2x) - \pi(x) + \nu(x) - 1.$$

But since $\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2)$, hence

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \geq \pi(2x) - \pi(x) + \nu(x) - 1.$$

Theorem 3.2 is proved.

Theorem 3.3 *For any natural number x ,*

$$\pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \leq \frac{\pi(x)}{2} + 1.$$

Proof. Consider the matrices conjugate in the first row residues for which it is known that

$$\overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda),$$

where $n = x^2$, $m^* = \pi(x^2)$, $\lambda = (x+1)^2$. From here it is not difficult to get

$$\overline{M}_{m^*,n}^{d_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{d_1}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + 1 - \alpha, \quad (3.8)$$

where d_2 is the number of those columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, each of which contains zeros in the lines $1 < i \leq m^*$, d_1 - the number of the same columns for the matrix $M_{m,n}(1)$. So $d_1 = x^2$, $d_2 = (x+1)^2$ and $\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2)$. This implies the inequality

$$\overline{M}_{m^*,n}^{d_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{d_1}(1, \bar{1}) \geq 2c^*(m, x, \lambda) - \frac{1}{2}\pi(x). \quad (3.9)$$

Subtracting (3.9) from (3.8), we get

$$\alpha = \pi((x+1)^2) - \pi(x^2) \leq \left\lfloor \frac{\pi(x)}{2} \right\rfloor + 1.$$

Theorem 3.3 is proved.

Theorem 3.4 *If $x, y \geq 2$ are natural numbers, then*

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y). \quad (3.10)$$

Proof. Without loss of generality, we can assume that $y > x$, so as for $x = y$ the theorem was proved in [2]. Consider matrices of residuals conjugate in the first row for which it is known that

$$\overline{M}_{m^*,n}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda).$$

Suppose $n = y$, $\lambda = x+1$, $m = \pi(y)$. Then

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) = 2c^*(m, n, \lambda) + [\log_2 x] + 1 - \alpha, \quad (3.11)$$

where k_1, k_2 is the number of those columns that have zeros in lines $i \neq 1, i \neq m+1$. Since these matrices have a common columns, and the zeros of these common columns are eliminated when subtracted, and the columns corresponding to the numbers $y-x$ disappear, therefore, $\alpha = \pi(x+y) - \pi(y)$

$$\overline{M}_{m^*,n}^{k_2}(\lambda, \bar{\lambda}) - \overline{M}_{m^*,n}^{k_1}(1, \bar{1}) \geq 2c^*(m, n, \lambda) + \frac{3}{2}[\log_2 x] - \pi(x). \quad (3.12)$$

Subtracting (3.12) from (3.11), we get

$$\alpha = \pi(x+y) - \pi(y) \leq \pi(x) - \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 x \right\rfloor + 1.$$

Hence,

$$\pi(x) + \pi(y) \geq \pi(x+y) + \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 x \right\rfloor - 1.$$

Theorem 3.4 is proved.

References

- [1] Janos Pintz, “Landau’s problems on primes”, J. Theor, Nombres, Bordeaux, vol. 21, no. 2, pp. 357-404, 2009.
- [2] Mkrtumyan E. L. “On some Problems of Distribution of Prime Numbers,” Chapter 2 of this collection.
- [3] Prakhar K. Distribution of primes M.: Nauka, 1967.
- [4] Changa M. E. Prime numbers in special intervals and additive problems with such numbers // Mathematical Notes. 2003.T. 73, No 3 S. 423–436.

Chapter 4

On prime and coprime numbers in special spaces, I

The article investigates sequences of natural numbers containing numbers that are coprime to all numbers less than a given number, depending on the length of the sequence. The study is carried out by the method of residual matrices.

4.1 Introduction

We denote by $\pi(n)$ the number of primes not exceeding the integer n . This article proves inequality

$$\pi(n) \leq \pi(3n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1, \quad (4.1)$$

and the theorem that among any consecutive $6n$ natural numbers, there is at least one number that is coprime with all numbers less than or equal to n .

This question interested many mathematicians and later became problematic. The most interesting works on this topic in Rankin. Note that Rankin also failed [1] to solve this problem [2], [3], because with the help of existing mathematics it is impossible to solve not only questions of prime numbers, but also inter-prime numbers in general.

4.2 Conjugate remainder matrices

Definition 4.1 *Two matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ are called conjugate if they differ in the distribution of zeros in only one line.*

In particular, we can consider such conjugate matrices, which differ in the distribution of zeros only in the first line.

Theorem 4.1 *The remainder matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ will be conjugate matrices in the first row, if*

$$\bar{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad m = \pi(n). \quad (4.2)$$

Proof. It follows from the definition of the remainder matrix that in i -th row, the elements are repeated with a period of P_i . Hence it follows that i -th rows of matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ coincide if and only if the difference $\lambda - \bar{\lambda}$ is a multiple of P_i . Hence matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ coincide if and only if the difference $\lambda - \bar{\lambda}$ is a multiple of the product of primes $\prod_{i=1}^m P_i$. Since the number $\prod_{i=2}^m P_i$ is always odd, the numbers λ and $\bar{\lambda}$ have different parity. Hence, for numbers λ and $\bar{\lambda}$ connected by the relation (4.2)

all rows (except for the first) of the matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ are the same, i.e. they are paired on the first line. The theorem is proved.

For example, for $\lambda = 1$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, the matrix $M_{4,8}(1)$ has the form

$$M_{4,8}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For $\lambda = 1$ we have $\bar{\lambda} = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$. The conjugate matrix $M_{4,8}(106)$ has the form

$$M_{4,8}(106) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 106 & 107 & 108 & 109 & 110 & 111 & 112 & 113 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As you can see, all rows (except the first) of the matrices $M_{4,8}(1)$ and $M_{4,8}(106)$ are the same.

The number of zero elements of the adjoint matrix $M_{m,n}(\bar{\lambda})$ denote by $\overline{M}_{m,n}(\bar{\lambda})$.

Definition 4.2 A column is called corresponding to the number λ_j if the elements of this column $a_{i,j}$ were formed by dividing the given the number λ_j to the prime number P_i and vice versa.

Theorem 4.2 Empty (containing no zero) column of the remainder matrix corresponds to the number λ_j , which is coprime with respect to all numbers $\leq n$, and corresponds to the column of the adjoint matrix, which contains only one zero, and this zero is in the row $i = 1$, and vice versa.

Proof is obvious, see example. In our example matrix $M_{4,8}(106)$ the second, fourth and eighth columns correspond to prime numbers 107, 109, 113. In the example of the matrix $M_{4,8}(1)$ the second, fourth and the eighth column contains only one zero, and this zero is in the row $i = 1$.

Theorem 4.3 The number of conjugate columns (only for the first row) of matrices, each of which contains at least one zero in lines $i > 1$, are equal to each other.

Proof. If the matrix contains at least one zero in the row $i > 1$, and in the column j , then the conjugate matrix is also in this a row and in the same column contains the same zero.

4.3 Residual matrices with step 2

Definition 4.3 A remainder matrix with step h is a matrix with $\lambda_j = \lambda + (j - 1)h$.

We denote it by $N_{m,n}(h|\lambda)$.

Below we will consider the remainder matrices $N_{m,n}(2|\lambda)$ with step 2. They contain $m = \pi(n)$ rows and n columns. Moreover, the element $a_{i,j}$ of the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ is the remainder of the division of the number $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ by P_i , P_i is the i th prime. If the

number λ is even, then the remainder matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ is called even. Note that, as for the usual matrix of residuals $M_{m,n}(\lambda)$, for an even matrix of residuals $N_{m,n}(2|\lambda)$ the first column corresponds to the number $\lambda_1 = \lambda$. For example, for $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 2$ the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ has the form

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

and for $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 0$ the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ has the form

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

All properties and notation of the residual matrices can be extended and into even matrices of residuals, only it is necessary to take into account that the first row ($P_1 = 2$) contains only zeros. Hence,

$$\overline{N}_{m,n}(2|0) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \quad m = \pi(n), \quad (4.3)$$

where $\overline{N}_{m,n}(2|\lambda)$ is the number of zero elements (zeros) of the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ - the number of distinct prime divisors of the number $2n$.

We denote

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2). \quad (4.4)$$

Note that $G(m, n, \lambda)$ depends only on strings $i > 1$, so how the first rows of these matrices contain the same amount of (n) zeros and in the difference (4.4) they are eliminated. Hence,

$$0 \leq G(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - 1.$$

Definition 4.4 The remainder matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ with step 2 is called even if the number λ (and therefore all numbers $\lambda_j = \lambda + 2j$) are even.

Definition 4.5 The remainder matrix $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$ with step 2 is called odd if the number λ (and therefore all numbers $\lambda_j = \lambda + 2j$) are odd

Note that the odd residue matrix the first column is $\lambda_1 = \lambda$, and the first row is n ones.

For example, for $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 1$ the matrix $N_{m,n}(2 \nmid 1)$ has the form

$$N_{4,8}(2 \nmid 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

4.4 Applying residual matrices with step 2

Theorem 4.4 *For any integer $n > 0$*

$$\pi(n) \leq \pi(3n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1. \quad (4.5)$$

Proof. Consider the odd number λ associated with n by the relation

$$\lambda = \begin{cases} n + 1, & \text{if } n \text{ is even,} \\ n, & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \quad (4.6)$$

Note that the numbers λ_j of an even matrix $N_{m,n}(2|2)$ consist of numbers $2, 4, 6, \dots, 2n$, and for an odd matrix $N_{m,n}(2 \uparrow \lambda)$ consist of n odd numbers starting at λ . Consider an even number

$$\bar{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad (4.7)$$

where $m = \pi(n)$. If (4.7) is satisfied, then an even matrix $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$, will be conjugate to an odd matrix $N_{m,n}(2 \uparrow \lambda)$. We have (see (4.4))

$$G(m, n, \lambda) = \bar{N}_{m,n}(2|\bar{\lambda}) - \bar{N}_{m,n}(2|2).$$

Let's call an empty column, containing no zeros in the strings $i > 1$. Let k be the number of those columns of an even matrix $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$, each of which in the lines $i > 1$ contains at least one zero, and α is the number of empty columns of an odd matrix $N_{m,n}(2 \uparrow \lambda)$. Not difficult notice that $\alpha = n - k$, and

$$\bar{N}_{m,n}^k(2|\bar{\lambda}) - \bar{N}_{m,n}(2|2) = G(m, n, \lambda) - \alpha, \quad (4.8)$$

where $\bar{N}_{m,n}^k(2|\bar{\lambda})$ is the number of all zeros (including the zeros of the first row) of k columns even matrix $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$.

Since the empty column corresponds to the number λ_j , which is coprime with respect to all numbers $\leq n$, then we have

$$\alpha = \pi(3n) - \pi(n). \quad (4.9)$$

There are empty columns in the matrix $N_{m,n}(2|2)$, their number is $[\log_2 n] + 1$. In addition, the matrix $N_{m,n}(2|2)$ has more columns containing only one zero in rows $i > 1$ than the matrix $N_{m,n}(2|\bar{\lambda})$. Therefore, taking into account (4.9), we get

$$\begin{aligned} G(m, n, \lambda) - \pi(n) - [\log_2 n] - 1 &\leq \\ \bar{N}_{m,n}^k(2|\bar{\lambda}) - \bar{N}_{m,n}(2|2) &\leq G(m, n, \lambda) - \pi(n). \end{aligned} \quad (4.10)$$

From (4.10) and (4.8) we get

$$\pi(n) \leq \pi(3n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1.$$

Theorem 4.4 is proved.

Theorem 4.5 *For any integer $x > 0$ among any consecutive $+ 6x$ natural numbers there is at least one number that is mutually prime with all numbers $\leq x$.*

Proof. Suppose given $3x$ consecutive natural numbers even numbers. Let's compose the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$, where $\lambda > 6x$ is an arbitrary even number, $m = \pi(x)$, $n = 3x$. Let's compose a matrix $N_{m,n}(2|2)$ consisting of numbers $2, 4, 6, \dots, 6x$. Let us compare these matrices by the number of zeros contained, i.e. consider the following relations

$$\overline{N}_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = G(m, n, \lambda), \quad (4.11)$$

or

$$\overline{N}_{m,n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = G(m, n, \lambda) - \alpha, \quad (4.12)$$

where k is the number of those columns of the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$, each of which contains at least one zero in the lines $i > 1$ (the first line does not appear as it only consists of zeros), α is the number of those columns of the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$, each containing only one zero and this zero in the line $i = 1$.

Note that $\overline{N}_{m,n}^k(2|\lambda)$ is the number of all zeros (including the zeros of the first row) k columns of the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$. Even if the number x contains only a simple divisor 3 (we don't talk about 2 anymore, since λ is even number), then all the same the string $i = 2, P_2 = 3$ does not affect the difference zeros in matrices, i.e. does not affect $G(m, n, \lambda)$. Because

$$0 \leq G(m, n, \lambda) \leq \pi(x) - 1, \quad (4.13)$$

then we get

$$\overline{N}_{m,n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2) \leq G(m, n, \lambda) - 1. \quad (4.14)$$

From (4.12) and (4.14) we get $\alpha \geq 1$. But on definition α is the number of numbers starting with λ , each of which is not contains not a single odd prime factor $\leq x$. Therefore, among any consecutive $3x$ even numbers there is at least one number that does not contain any prime odd divisor $\leq x$.

In the language of conjugate matrices, this means that among any consecutive $3x$ natural odd numbers, there is at least one a number that is coprime to all numbers $\leq x$. But $3x$ odd numbers are adjacent to $3x$ even numbers. Hence, among any consecutive $6x$ natural numbers, there is at least one number that is coprime to all numbers $\leq x$. This proves Theorem 4.5.

Note. As $\nu(x)$ increases, the inequality (4.14) becomes stronger, and hence the following theorem is strengthened. Theorem 4.5.

References

- [1] Prakhar K. Distribution of primes M.: Nauka, 1967.
- [2] Rankin R. A. "The difference between consecutive prime numbers, I", London Math. Soc. 13 (1938), 242-247.
- [3] Rankin R. A. "The difference between consecutive prime numbers, II", Proc. Cambridge Phil. Soc. 36 (1990), 255-256.
- [4] Mkrtumyan E. L. On some problems of distribution of prime numbers, chapter 1 of this collection.

Chapter 5

On prime and coprime numbers in special spaces, II

The article examines sequences of natural numbers, containing numbers coprime to all numbers less than a given number depending on the length of the sequence. By using of the residual matrices, an estimate is obtained for the upper bound of the function $\rho^*(x)$.

5.1 Introduction

In article [1] the function $\rho^*(x)$ is defined as follows:

$$\rho^*(x) = \max_y N(x, y),$$

where $N(x, y)$ is the number of natural numbers in the interval $(y, y+x)$, which are coprime to all numbers less than or equal to x . In [1], the inequality was obtained

$$\rho^*(x) - \pi(x) \geq (\log 2 - \varepsilon) \frac{x}{(\log x)^2},$$

where $\pi(x)$ denotes the number of primes not exceeding integer x . This inequality implies

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\rho^*(x) - \pi(x)) = +\infty.$$

Note that [1] is the best study of the function $\rho^*(x)$. However, there remains the problem of estimating the function $\rho^*(x)$ from above. The estimate proposed by E. Landau [2]

$$\rho^*(x) \leq 2\pi(x)$$

is rough for $y \gg x$. In this article, using the theory of the residual matrices, an estimate is obtained for the upper bound of the function $\rho^*(x)$, namely

$$\rho^*(x) \leq \pi(n) + 3([\log_2 n] + 1), \quad \text{where } n = 12x, y = 11x, \lambda \geq 2.$$

Let's give a more accessible definition: *function $\rho^*(x)$ shows the maximum number of natural numbers from consecutive numbers $\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+x+y$, each of which coprime with all primes less than or equal to x .*

It is clear that $y \gg x$, so you actually need to find the dependency $y = f(x)$. Of course, on a number line intervals corresponding to the definition of $\rho^*(x)$, there are countless, as conjugate matrices residues on the first line at $\lambda = 2^\epsilon$, $\epsilon > 1$ has countless [3]. Therefore, the problem of finding the function $\rho^*(x)$ also contains the problem of finding the smallest natural number λ , from which such an interval begins.

5.2 Residual matrices

Consider the following matrix, which we call the remainder matrix [3]:

$$M_{m,n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

where $a_{i,j}$ is the remainder of the division of the number $\lambda_j = \lambda + j - 1$ by P_i , P_i is the i -th prime, $\lambda \geq 0$ is an integer number, $n \geq 2$ - natural number, $m = \pi(n)$ - amount primes not exceeding n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$.

The following theorems hold.

Theorem 5.1 *For any natural number n*

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n),$$

where $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ is the number of zero elements (zeros) matrices $M_{m,n}(\lambda)$, $\nu(n)$ is the number of different prime divisors of n .

Proof. Matrix matching $M_{m,n}(0)$ and $M_{m,n}(1)$ shows that the j -th column of the matrix $M_{m,n}(0)$ starting from the second column, coincides with the $j - 1$ th column of the matrix $M_{m,n}(1)$. Moreover, in the matrix $M_{m,n}(0)$ the first column differs from all columns of the matrix $M_{m,n}(1)$, and the last column $M_{m,n}(1)$ differs from all columns of the matrix $M_{m,n}(0)$.

The first column of the matrix $M_{m,n}(0)$ contains $\pi(n)$ zeros, and the last column of the matrix $M_{m,n}(1)$ contains $\nu(n)$ zeros, hence,

$$\overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) = \pi(n) - \nu(n).$$

Theorem 5.2 *For any integer $\lambda \geq 0$*

$$\overline{M}_{m,n}(0, i) \geq \overline{M}_{m,n}(\lambda, i) \geq \overline{M}_{m,n}(1, i),$$

where $\overline{M}_{m,n}(\lambda, i)$ is the number of zeros of the i -th row of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$.

Proof. It is easy to see that

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(0, i), \quad \text{if } \lambda + a_i \equiv 0(\text{mod } P_i), \lambda + n - b_i \equiv 0(\text{mod } P_i),$$

$$0 \leq a_i < \frac{P_i - 1}{2}, \quad 0 \leq b_i < \frac{P_i - 1}{2},$$

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(1, i), \quad \text{if } \lambda + a_i \equiv 0(\text{mod } P_i), \lambda + n - b_i \equiv 0(\text{mod } P_i),$$

$$a_i > \frac{P_i - 1}{2}, \quad b_i > \frac{P_i - 1}{2}.$$

Therefore, the theorem is proved.

Corollary 5.1

$$\overline{M}_{m,n}(1) \leq \overline{M}_{m,n}(\lambda) \leq \overline{M}_{m,n}(0).$$

Proof follows from the equalities:

$$\sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(1, i) = \overline{M}_{m,n}(1), \quad \sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(\lambda, i) = \overline{M}_{m,n}(\lambda),$$

$$\sum_{i=1}^m \overline{M}_{m,n}(0, i) = \overline{M}_{m,n}(0).$$

Denoting

$$c(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1),$$

we have

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) &= \pi(n) - c(m, n, \lambda) - \nu(n), \\ 0 &\leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n). \end{aligned} \tag{5.1}$$

5.3 Conjugate remainder matrices

Definition 5.1 Two matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ are called conjugate if they differ in the distribution of zeros in only one line.

In particular, we can consider such conjugate matrices, which differ in the distribution of zeros only in the first line. For example, $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ would be conjugate matrices in the first row if

$$\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda, \quad m = \pi(n). \tag{5.2}$$

For example, for $\lambda = 1$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$ the matrix $M_{4,8}(1)$ has the form

$$M_{4,8}(1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

For $\lambda = 1$ we have $\overline{\lambda} = 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 106$. The conjugate matrix $M_{4,8}(106)$ has the form

$$M_{4,8}(106) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 106 & 107 & 108 & 109 & 110 & 111 & 112 & 113 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As you can see, all rows (except the first) of the matrices $M_{4,8}(1)$ and $M_{4,8}(106)$ are the same.

The number of zero elements of the adjoint matrix $M_{m,n}(\overline{\lambda})$ denote by $\overline{M}_{m,n}(\overline{\lambda})$.

Definition 5.2 A column is called corresponding to the number λ_j if the elements of this column $a_{i,j}$ were formed by dividing the given the number λ_j to the prime number P_i and vice versa.

Theorem 5.3 *Empty (containing no zero) column of the remainder matrix corresponds to the number λ_j , which is coprime with respect to all numbers $\leq n$ and the column of the adjoint matrix, which contains only one zero, and this zero is in the row $i = 1$, and vice versa.*

Proof is obvious, see example. In our example, the matrix $M_{4,8}(106)$ the second, fourth and eighth columns correspond to prime numbers 107, 109, 113. In the example of the matrix $M_{4,8}(1)$ the second, the fourth and eighth columns only contain one zero, and this zero is in the line $i = 1$.

Theorem 5.4 *The number of conjugate columns (only for the first row) of matrices, each of which contains at least one zero in lines $i > 1$, are equal to each other.*

Proof. If the matrix contains at least one zero in the row $i > 1$, and in the column j , then the conjugate matrix is also in this a row and in the same column contains the same zero.

5.4 Residual matrices with step 2

Definition 5.3 *By the remainder matrix with step h we mean the matrix in which $\lambda_j = \lambda + (j - 1)h$.*

We denote it by $N_{m,n}(h|\lambda)$.

Below we will consider the remainder matrices $N_{m,n}(2|\lambda)$ with step 2. They contain $m = \pi(n)$ rows and n columns. Moreover, the element $a_{i,j}$ of the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ is the remainder of the division of the number $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ by P_i , P_i is the i th prime. If the number λ is even, then the remainder matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ is called even. Note that, as for the usual matrix of residuals $M_{m,n}(\lambda)$, for an even matrix of residuals $N_{m,n}(2|\lambda)$ the first column corresponds to the number $\lambda_1 = \lambda$. For example, for $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 2$ the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ has the form

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

and for $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 0$ the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ has the form

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 7 & 0 & 2 & 4 & 6 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

All properties and notation of the residual matrices can be extended and into even matrices of residuals, only it is necessary to take into account that the first row ($P_1 = 2$) contains only zeros. Hence,

$$\overline{N}_{m,n}(2|0) - \overline{N}_{m,n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \quad (5.3)$$

where $\overline{N}_{m,n}(2|\lambda)$ is the number of zero elements (zeros) of the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ - the number of distinct prime divisors of the number $2n$.

We denote

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,n}(2|2). \quad (5.4)$$

Note that for even λ the function $G(m, n, \lambda)$ depends only on the strings $i > 1$, so how the first rows of these matrices contain the same amount of (n) zeros and in the difference (5.4) they are eliminated.

Definition 5.4 *The remainder matrix $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$ with step 2 is called odd if the number λ is odd.*

Note that the odd residue matrix the first column is $\lambda_1 = \lambda$, and the first row is n ones.

For example, for $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, $\lambda = 1$ the matrix $N_{m,n}(2|\lambda)$ has the form

$$N_{m,n}(2 \nmid 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 7 & 1 & 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 6 & 1 \end{bmatrix},$$

For numbers λ and $\overline{\lambda}$ connected by the relation (5.2) all rows (except for the first) of the matrices $N_{m,n}(2|\lambda)$ and $N_{m,n}(2 \nmid \overline{\lambda})$ coincide, such matrices are called conjugate matrices on the first row.

Since the number $\prod_{i=2}^m P_i$ is always odd, the numbers λ and $\overline{\lambda}$ have different parity. Hence, the matrix conjugate to an even matrix will be odd and vice versa: the matrix conjugate to an odd matrix will be even.

Lemma 5.1 *For odd λ and even number $\overline{\lambda} = \prod_{i=2}^m P_i + \lambda$ and $m = \pi(n)$ we have*

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,n}(2 \nmid \overline{\lambda}) - \overline{N}_{m,n}(2 \nmid \lambda) = n.$$

Proof. The first row of an even matrix $N_{m,n}(2|\overline{\lambda})$ contains n zeros, and the first row of an odd matrix $N_{m,n}(2 \nmid \lambda)$ no zeros (solid ones). Since these matrices are conjugate in the first row, the rest of their rows coincide. The lemma is proved.

Theorem 5.5 *If $2 \nmid n$, then*

$$\pi(n) + 2([\log_2 n] + 1) \leq \pi(12n) - \pi(6n) \leq \pi(n) + 3([\log_2 n] + 1).$$

Proof. Consider the matrix $M_{m,12n}(1)$, where $2 \nmid n$, $m = \pi(n)$ and represent it as

$$M_{m,12n}(1) = M_{m,6n}(1) + M_{m,6n}(6n+1) = N_{m,6n}(2|2) + N_{m,6n}(2 \nmid 1).$$

Let's cross out all those columns of these matrices in each of which there is at least 1 zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi(n)$.

1) In the matrix $M_{m,6n}(1)$ the number of uncrossed columns denoting k_1^* we get

$$\pi(6n) - \pi(n) - 2[\log_2 n] - 1 \leq k_1^* \leq \pi(6n) - \pi(n) - [\log_2 n] - 1. \quad (a)$$

Because the columns that correspond to the numbers $2P_k$, $n < P_k < 3n$ and $[\log_2 3n] = [\log_2 n] + 1$ are not crossed out, and the number of crossed out columns is $k_1 = 6n - k_1^*$.

2) The number of uncrossed columns in the matrix $M_{m,6n}(6n+1)$ denoting k_2^* we have

$$\pi(6n) + [\log_2 n] - 1 \leq k_2^* \leq \pi(6n) + [\log_2 n] + 2. \quad (b)$$

Because among the numbers $6n+1, 6n+2, \dots, 12n$ there is only one number like 2^r , and numbers like $2^r \cdot P_k$, where $n < P_k < 3n$, $6n < 2^r P_k \leq 12n$ which are also not crossed out, but the number of crossed out columns $k_2 = 6n - k_2^*$.

Since $\overline{M}_{m,6n}(6n+1) - \overline{M}_{m,6n}(1) = G(m, 6n, 6n+1)$ and therefore

$$\overline{M}_{m,6n}^{k_2}(6n+1) - \overline{M}_{m,6n}^{k_1}(1) = G(m, 6n, 6n+1) - \overline{M}_{m,6n}^{k_2^*}(6n+1) + \overline{M}_{m,6n}^{k_1^*}(1),$$

where $\overline{M}_{m,n}^k(n)$ shows the number of zero residues (including zero residues and strings $i = 1$) from the expression $\overline{M}_{m,6n}^{k_2^*}(6n+1) - \overline{M}_{m,6n}^{k_1^*}(1)$ and from inequalities (a) and (b) we obtain Theorem 5.5.

The same answer would be obtained if the columns of the matrix $M_{m,6n}(1)$ and $M_{m,6n}(6n+1)$ were arranged by the maximum number of zero residuals so that with one the sides distributed uncrossed columns, and then crossed out, and matched matrices in this arrangement of columns.

Corollary 5.2 *In the matrix $N_{m,6n}(2|2)$, where $2 \nmid n$, $m = \pi(n)$, the number of columns in each of which has only one zero remainder, and this one is zero remainder in the line $i = 1$, not less than $\pi(n) + 2([\log_2 n] + 1)$ and not more than $\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1)$.*

Proof of the corollary follows from the proof of the theorem if we consider the matrices $N_{m,6n}(2|2)$ and $N_{m,6n}(2 \nmid 1)$ with strikethrough and uncrossed columns, given that they have the same number of columns.

5.5 Main Theorem

Recall that the function $\rho^*(x)$ shows the maximum the number of natural numbers among consecutive numbers $\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+x+y$, which are coprime to all primes less than or equal to x .

Theorem 5.6 *On the number axis among any consecutive There are at most $12n$ natural numbers*

$$\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1)$$

numbers, each of which is coprime with all prime numbers $\leq n$.

Proof. Consider even matrices $N_{m,6n}(2|2)$ and $N_{m,6n}(2|\lambda)$, where $m = \pi(n)$ and λ is an even number, $\lambda \gg n$.

Note that the matrix $N_{m,6n}(2|2)$ is composed of the numbers $2, 4, 6, \dots, 12n$, and the matrix $N_{m,6n}(2|\lambda)$ is composed of the numbers $\lambda, \lambda+2, \lambda+4, \dots, \lambda+12n-2$.

Let's compare these matrices by the number contained zeros, i.e. consider the following relations following from (4.2),

$$\overline{N}_{m,6n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) = G(m, 6n, \lambda), \quad (5.5)$$

or

$$\overline{N}_{m,6n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) = G(m, n, \lambda) - \alpha, \quad (5.6)$$

where k is the number of those columns of the matrix $N_{m,6n}(2|\lambda)$, each of which in lines $i > 1$ contains at least one zero (the first line is not appears, since it consists only of zeros), α is the number of those columns of the same matrix, each of which contains only one zero and this zero in the line $i = 1$. Hence,

$$6n = k + \alpha$$

Let us prove the inequality

$$\overline{N}_{m,6n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) \geq G(m, n, \lambda) - \pi(n) - 3([\log_2 n] + 1), \quad (5.7)$$

where $\overline{N}_{m,6n}^k(2|\lambda)$ is the number of those columns of the matrix $N_{m,6n}(2|\lambda)$, each of which in lines $1 < i \leq m = \pi(n)$ contains at least one zero. Suppose the opposite, i.e.

$$\overline{N}_{m,6n}^k(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) < G(m, n, \lambda) - \pi(n) - 3([\log_2 n] + 1). \quad (5.8)$$

Since the matrix $N_{m,6n}(2|2)$, by Corollary 5.1, contains at most $\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1)$ columns, each of which contains zeros only in the first line, and $N_{m,6n}^{k+\alpha}(2|\lambda) = N_{m,6n}(2|\lambda)$, from (5.8) we get

$$\overline{N}_{m,6n}^{k+\alpha}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,6n}(2|2) < G(m, n, \lambda).$$

But this contradicts the equality (5.5). The inequality (5.7) is proved.

From (5.6) and (5.7) we get

$$\alpha \leq \pi(n) + 3([\log_2 n] + 1). \quad (5.9)$$

Remembering that α is the number of those columns of the matrix $N_{m,6n}(2|\lambda)$, each of which contains only one zero and this zero in the string $i = 1$, we can assert that on the number axis, among consecutive $6n$ even natural numbers are at most α numbers, each of which does not contain a single odd prime divisor $\leq n$.

But since $6n$ consecutive even numbers make up an even matrix, and somewhere on the numerical axis there corresponds an odd matrix conjugate by columns that have the same number, respectively even and odd columns, hence the difference of these columns, each of which contains at least there would be one zero in the lines $1 \leq i \leq m$, at most $\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1)$.

Thus, an even matrix $N_{m,6n}(2|\lambda)$ and an odd $N_{m,6n}(\lambda \mp 1)$, where $m = \pi(n)$, $\lambda \geq 2$, are column-conjugate matrices, and the difference of their columns, each of which contains at least one zero in the lines $1 \leq i \leq m$, also at most

$$\pi(n) + 3([\log_2 n] + 1).$$

Thus

$$\rho^*(12n) = \rho^*(x) \leq \pi(n) + 3([\log_2 n] + 1), \quad n = 12x, \quad y = 11x, \quad \lambda \geq 2.$$

Theorem 5.6 is proved.

References

- [1] D. Hensley, J. Richards, "Primes in Intervals", Acta Arithm., Vol 25, no. 4, 375-394, 1974.
- [2] Janos Pintz, "Landau's problems on primes", J. Theor, Nombres, Bordeaux, vol. 21, no. 2, pp. 357-404, 2009.
- [3] Mkrtumyan E. L. About prime and coprime numbers in special intervals I of.

Chapter 6

Adjacent residue matrices and sieve method

The article shows that the Mersenn primes (M_p) and Fermat primes (F_p) are innumerable, and their places on the number axis are indicated. The study is carried out by the method of residual matrices proposed by the author.

6.1 Introduction

Numbers of the form $F_n = 2^{2^n} + 1$ are called Fermat numbers, if they are simple, we denote them by F_p . If a number of the form $2^n - 1$ is a prime, then it is called a Mersenn prime and is denoted by M_p .

My goal is to show that the Mersenn primes (M_p) and Fermat primes (F_p) are innumerable and indicate their places on the number axis.

Many generations of mathematicians (and not only mathematicians) have been engaged in problems of prime numbers by Mersen and Fermat, but could not prove their infinity. Conservative mathematicians who neglect the theory of residual matrices have great difficulties in finding the next Mersenn or Fermat prime. All these difficulties can be overcome with the help of the theory of residual matrices developed by the author.

6.2 Remainder matrices, columns without zeros

Consider the following matrix, which we call the remainder matrix:

$$M_{m,n}(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

where $a_{i,j}$ is the remainder of the division of the number $\lambda_j = \lambda + j - 1$ by P_i , P_i is the i -th prime, $\lambda \geq 0$ is an integer number, $n \geq 2$ - natural number, $m = \pi(n)$ - amount primes not exceeding n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$.

For example, for $\lambda = 8$, $n = 8$, $m = \pi(8) = 4$, the matrix $M_{4,8}(8)$ has the form

$$M_{4,8}(8) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obviously, prime numbers greater than n correspond to columns without zeros, and prime numbers $P_i \leq n$ correspond to columns with one zero in the row $i > 1$.

O denote by $\nu(x)$ the number of different prime divisors of x . In the matrix $M_{m,2n}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, the number of zero remainders of the column j is denoted by $\nu_m^*(j)$, and the number of nonzero remainders of the column j is denoted through $L_m(j)$. Since each column contains $m = \pi(n)$ zero and nonzero remainders, then

$$L_m(j) + \nu_m^*(j) = \pi(n) = m, \quad L_m(n^k) = \pi(n^k) - \nu(n) \quad \text{or} \quad L_m(p^k) = \pi(p^k) - 1. \quad (6.1)$$

6.3 Adjacent remainder matrices

One of the fundamental concepts of the theory of remainder matrices is the concept of Adjacent remainder matrices.

Definition 6.1 *Two matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\lambda + 1)$ are called contiguous residual matrices.*

For example, for the matrix $M_{4,8}(8)$: the adjacent matrix is $M_{4,8}(9)$ which has the form

$$M_{4,8}(9) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 7 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

We denote by $\overline{M}_{m,n}(\lambda)$ - the number of zero elements (zeros) matrices $M_{m,n}(\lambda)$. Let us investigate the question of how the number of zero elements in adjacent matrices differs. O denote by $\nu_m^*(j)$ the number of zero remainders of the column j in the matrix $M_{m,n}(1)$.

Theorem 6.1 *For any m, n and λ*

$$|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda + 1)| = |\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)| \geq 0.$$

Proof. From (6.1) we have for the matrix $M_{m,n}(\lambda)$

$$L_m(\lambda) + \nu_m^*(\lambda) = \pi(n),$$

Since the matrix $M_{m,n}(\lambda + 1)$ is obtained from the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ by shifting one column to the left, then the j -th column of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ coincides with the $j - 1$ column of the matrix $M_{m,n}(\lambda + 1)$, $j = 2, 3, \dots, n$. Thus, the columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, except for the first, coincide with the columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda + 1)$, except for the last. Hence,

$$|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda + 1)| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda + 1)| = |\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)| \geq 0.$$

The theorem is proved.

Note. The notation $|\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)| \geq 0$ in the theorem surprises many mathematicians who believe that this is trivial since the modulus cannot be negative. With this entry, we wanted to emphasize that for some n and λ , the expression $|\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)|$ can be zero, e.g. $\nu_m^*(10) = \nu_m^*(21)$. Thus, matrix mathematics represents the relationship of numbers on the number axis deeper than the existing one.

Theorem 6.2 *In matrix mathematics, the following relations hold:*

$$|\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(\lambda + 1)| = |\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + n)| = 1, n < \lambda, m = \pi(n),$$

if

- 1) $\lambda = p$ is a prime number; $\lambda + 1 = 2^r$, where r is a natural number;
- 2) $\lambda + 1 = p$ is a prime number, where $\lambda + n = 2^r$, or vice versa.

Proof follows from the comparison of adjacent remainder matrices $M_{m,p}(p)$ and $M_{m,p}(p + 1)$ and reduction to the difference of their zero remainders

$$|L_m(\lambda) - L_m(\lambda + 1)| = |\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + 1)| = 1.$$

Corollary 6.1 *If*

$$|\nu_m^*(\lambda) - \nu_m^*(\lambda + 1)| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda + 1)| = 1,$$

then

$$|\overline{M}_{m,n}(n) - \overline{M}_{m,n}(n + 1)| = 1.$$

Proof of the corollary follows trivially from the proof of the theorem. It is immediately clear that the corollary and the theorem are true if $n = p$ is a prime number and $n + 1 = 2^r$ or vice versa.

Theorem 6.3 *If $p = 2^n + 1$ is a prime, then $q = (2^n)^2 + 1 = 4^n + 1$ is also a prime...*

Proof. Consider matrix $M_{m,q}(1)$, where $m = \pi(2^n)$. Let's cross out those columns that have at least one zero in the rows $1 < i \leq m$. Columns corresponding to numbers 1 and 2, 2^n and $2^n + 1$, $(2^n)^2$ and $(2^n)^2 + 1$ is not crossed by Theorem 6.2 and Corollary, and since in matrix mathematics

$$\begin{aligned} |\overline{M}_{m,q-1}(1) - \overline{M}_{m,q-1}(2)| &= |\overline{M}_{m,q-p}(p-1) - \overline{M}_{m,q-p}(p)| = \\ &= |\overline{M}_{m,p-1}(1) - \overline{M}_{m,p-1}(2)| = |\nu_m^*(2) - \nu_m^*(1)| = |L_m(\lambda) - L_m(\lambda + 1)| = 1. \end{aligned}$$

This means that the number q is prime. The theorem is proved.

Theorem 6.3 has a deeper meaning than what follows from the fact that $2^n + 1$ is a prime number, that is, it is seen that n is not only even, but also cannot have odd prime divisors. This suggests that in matrix mathematics, Fermat's primes can be found among the numbers closer to the beginning of the number axis, and then the rest can be determined farther from the beginning of the number axis. That is

$$2^2 + 1 = 5, \quad (2^2)^2 + 1 = 17, \quad ((2^2)^2)^2 + 1 = 257, \dots$$

This is how all Fermat primes F_p can be found ad infinitum.

The Great Fermat applied the "method of infinite descent" in conjunction with the concept of "arithmetic mean". But the genius Fermat, unfortunately, was not familiar with the theory of residual matrices and did not assume that the "arithmetic mean" on the number axis could be a point, not a number. Therefore, Fermat made some mistakes, such as his assumption that all numbers of the form $F_n = 2^{2^n} + 1$ are prime.

Theorem 6.4 *If $q = 2^p - 1$ is a prime number, then $2^q - 1 = q_k$ is also a prime number.*

Proof. Consider matrix $M_{m,q_k}(1)$, where $m = \pi(2^p - 2)$. Using Theorem 6.2, and the fact that matrices $M_{m,q_k-q}(q-1)$ and $M_{m,q_k-q}(q)$ are adjacent, similarly to the proof of Theorem 6.3, we obtain the proof of Theorem 6.4, those. $2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, $2^7 - 1 = 127$, ...

Note that not all Mersenn primes are obtained this way. For example, $2^5 - 1 = 31$ is also a Mersenne prime, and 31, like 3, becomes the beginning of a new series of Mersenne primes. All Mersenne primes can be obtained using these two series. This stems from the decimal nature of matrix mathematics, where the prime numbers 2, 3, and 5 play a fundamental role. This is what distinguishes existing mathematics from matrix mathematics, and Mersenne's primes from Fermat's primes!

References

- [1] Rosser, Schoenfeld, Illinois J. Math., Vol. 6, pp. 64-89, 1962.
- [2] Landau. Handbuch der Lehre von der Verteilungen der Primzahlen, Leipzig, 1909.
- [3] Mkrtumyan E. L. Residual matrices, Bulletin of ErGosUnt. 1995.No 2, S. 107-108.

Chapter 7

Residue matrices and Schinzel's problem

The article investigates sequences of natural numbers containing numbers that are coprime to all numbers less than a given number, depending on the length of the sequence. The study is carried out by the method of residual matrices. Schinzel's problem on primes in arithmetic progressions is proved

The famous Polish mathematician A. Schinzel hypothesized that any arithmetic progression $ax_i + b$, $1 \leq b < a$, $(a, b) = 1$ contains at least one prime number if $0 \leq x_i \leq a$. This problem is known as the Schinzel problem and has not yet been solved. Experts know [1] how much effort and time it took to prove the infinity of primes in arithmetic progression. Residual matrices facilitate the solution of such problems.

7.1 Residual matrices with step 2

Definition 7.1 *By the remainder matrix with step h we mean the matrix in which $\lambda_j = \lambda + (j - 1)h$.*

We denote it by $N_{m,hn}(h|\lambda)$.

We denote by $\pi(n)$ the number of primes not exceeding an integer n . Below we will consider the remainder matrices $N_{m,2n}(2|\lambda)$ with step 2. They contain $m = \pi(n)$ rows and $2n$ columns. Moreover, the element $a_{i,j}$ of the matrix $N_{m,2n}(2|\lambda)$ is equal to the remainder of the division of the number $\lambda_j = \lambda + 2j - 2$ by P_i , P_i is the i th prime. If the number λ is even, then the remainder matrix $N_{m,2n}(2|\lambda)$ is called even. Note that, as for the usual matrix of residuals $M_{m,n}(\lambda)$, for an even matrix of residuals $N_{m,2n}(2|\lambda)$ the first column corresponds to the number $\lambda_1 = \lambda$. For example, for $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 2$ the matrix $N_{m,2n}(2|\lambda)$ has the form

$$N_{4,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

and for $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 0$ the matrix $N_{m,2n}(2|\lambda)$ has the form

$$N_{4,8}(2|0) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

All properties and notation of the residual matrices can be extended and into even matrices of residuals, only it is necessary to take into account that the first row ($P_1 = 2$) contains

only zeros. Hence,

$$\overline{N}_{m,2n}(2|0) - \overline{N}_{m,2n}(2|2) = \pi(n) - \nu(2n), \quad m = \pi(n), \quad (7.1)$$

where $\overline{N}_{m,2n}(2|\lambda)$ is the number of zero elements (zeros) of the matrix $N_{m,2n}(2|\lambda)$, $\nu(2n)$ - the number of distinct prime divisors of the number $2n$.

We denote

$$G(m, n, \lambda) = \overline{N}_{m,2n}(2|\lambda) - \overline{N}_{m,2n}(2|2). \quad (7.2)$$

Note that $G(m, n, \lambda)$ depends only on strings $i > 1$, so how the first rows of these matrices contain the same amount of $(2n)$ zeros and in the difference (7.2) they are eliminated. Hence,

$$0 \leq G(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - 1.$$

Definition 7.2 *The remainder matrix $N_{m,2n}(2|\lambda)$ with step 2 is called even if the number λ (and therefore all numbers $\lambda_j = \lambda + 2j$) are even.*

Definition 7.3 *The remainder matrix $N_{m,2n}(2 \nmid \lambda)$ with step 2 is called odd if the number λ (and therefore all numbers $\lambda_j = \lambda + 2j$) are odd*

Note that the odd residue matrix the first column corresponds to an odd number $\lambda_1 = \lambda$, and the first row consists of $2n$ ones.

For example, for $n = 4$, $m = \pi(4) = 2$, $\lambda = 1$ the matrix $N_{m,2n}(2 \nmid \lambda)$ has the form

$$N_{m,2n}(2 \nmid 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

7.2 Extended residual matrices

Extend the odd matrix $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$ by adding m^* rows corresponding to the squares of primes P_q lying in the interval $3 \leq P_q \leq \sqrt{4n}$ (m^* is the number of primes P_q lying in the interval $3 \leq P_q \leq \sqrt{4n}$). This means that each number corresponding to a column of the matrix is also divided by P_q^2 and the resulting remainder is attributed to the corresponding column. The extended matrix is denoted by $N_{m_*,2n}(2 \nmid 1)$ and $N_{m_*,2n}(2|2)$, where $m = \pi(n)$, $m_* = m + m^*$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$. For example, for $n = 4$ in the interval $3 \leq P_q \leq \sqrt{16} = 4$ there is one prime number $p_q = 3$. So $m = \pi(4) = 2$, $m^* = 3$,

$$N_{m_*,8}(2 \nmid 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

The purpose of the extension is to create a criterion by which you can distinguish prime numbers from composite numbers.

7.3 Esh   times about prime and coprime numbers in special intervals

Theorem 7.1 *For any natural number n*

$$\pi(n) + [\log_2 n] + 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + 2. \quad (7.3)$$

Proof. Consider an odd matrix $N_{m,2n}(2 \uparrow 1)$, (whose columns correspond to the numbers $1, 3, 5, \dots, 2n-1$) and an even matrix $N_{m,2n}(2|2)$ (whose columns correspond to the numbers $2, 4, 6, \dots, 2n$), $m = \pi(n)$. We extend these matrices by adding m^* rows corresponding to the squares of primes P_q lying in the interval $3 \leq P_q \leq \sqrt{4n}$ (m^* is the number of primes P_q lying in the interval $3 \leq P_q \leq \sqrt{4n}$). This means that each number corresponding to a column of the matrix is also divided by P_q^2 and the resulting remainder is attributed to the corresponding column. The extended matrix is denoted by $N_{m_*,2n}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*,2n}(2|2)$, where $m = \pi(n)$, $m_* = m + m^*$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$. For example, for $n = 4$ we have $m = \pi(4) = 2$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$,

$$N_{m_*,8}(2 \uparrow 1) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & 2 & 4 & 6 \end{bmatrix},$$

$$N_{m_*,8}(2|2) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 6 & 8 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},$$

since the matrix $M_{m_*,4n}(1) = N_{m_*,2n}(2 \uparrow 1) + N_{m_*,2n}(2|2)$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{4n})$. Let's cross out those columns of these matrices that have at least 2 zeros in the rows $1 < i \leq m_*$. In the odd matrix $N_{m_*,2n}(2 \uparrow 1)$, we also cross out the columns corresponding to the primes p_i , $\sqrt{4n} < p_i^r \leq 4n$, $r \geq 2$. In the matrix $N_{m_*,2n}(2|2)$, cross out the columns corresponding to numbers of the form $2p^r$, $\sqrt{4n} < 2p^r \leq 4n$, $r \geq 2$.

1. The number of uncrossed columns in an odd matrix $N_{m_*,2n}(2 \uparrow 1)$ will be

$$k_1^* = \pi(4n) - \pi(n) + [\log_2 n] + 1,$$

since the first column is not crossed out.

The number of crossed out columns in the matrix $N_{m_*,2n}(2 \uparrow 1)$ will be $k_1 = 2n - k_1^*$.

2. The number of uncrossed columns in an even matrix $N_{m_*,2n}(2|2)$ is denoted by k_2^* .

On the one hand, we have

$$k_2^* \geq \pi(4n) - 2\pi(n) - [\log_2 n] - 1,$$

since the uncrossed columns correspond to the numbers $2p_i$ and $4p_i$, where $2 < p_i \leq n$; $4p_i \leq 4n$; also uncrossed columns, corresponding to the numbers $2^r p_i$, $r > 2$, and the uncrossed numbers $[\log_2 2n]$.

On the other hand, we have

$$k_2^* \leq \pi(4n) - 2\pi(n) + 1,$$

because the number of numbers like $2^r p_i$ is less than $[\log_2 n] + 1$.

Since the number of columns in matrices $N_{m_*,2n}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*,2n}(2|2)$ are equal to each other, then arranging the matrix columns by the maximum number of zeros (first uncrossed, and then crossed out) and comparing the matrices, we get

$$\pi(n) + [\log_2 n] + 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + 2.$$

Theorem 7.1 is proved.

Theorem 7.2 *For any natural number n*

$$\pi(n) + 2[\log_2 n] + 1 \leq \pi(6n) - \pi(3n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + 2. \quad (7.4)$$

Proof. It's clear that

$$M_{m_*,6n}(1) = N_{m_*,3n}(2 \uparrow 1) + N_{m_*,3n}(2|2).$$

Consider the extended matrices $N_{m_*,3n}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*,3n}(2|2)$, where $m_* = m + m^*$, $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{6n})$. Let's cross out those columns that have at least 2 zeros in the rows $1 < i \leq m_*$. In the odd matrix $N_{m_*,3n}(2 \uparrow 1)$, we also cross out the columns corresponding to the numbers p_i , $\sqrt{6n} < p_i^r < 6n$, $r \geq 2$. In the matrix $N_{m_*,3n}(2|2)$, we also cross out the columns corresponding to numbers of the form $2p_i$, $\sqrt{6n} < 2p_i^r \leq 6n$, $r \geq 2$.

1. The number of uncrossed columns in an odd matrix $N_{m_*,3n}(2 \uparrow 1)$ will be

$$k_1^* = \pi(6n) - \pi(n) + [\log_2 n] + 2,$$

and the number of crossed out columns will be $k_1 = 3n - k_1^*$.

2. The number of uncrossed columns in an even matrix $N_{m_*,3n}(2|2)$ is denoted by k_2^* . On the one hand, we have

$$k_2^* \geq \pi(6n) - 2\pi(n) - [\log_2 n],$$

since the columns corresponding to the numbers $2p_k$ and $4p_k$ are not crossed out, where $n < p_k \leq 3n$; $4p_k \leq 6n$; also the columns are not crossed out, corresponding to numbers $[\log_2 6n]$, their number is not more than

$$k_2^* \leq \pi(6n) - 2\pi(n) - [\log_2 n] + 1.$$

Arranging the columns of matrices as in Theorem 7.1 and comparing them, we obtain

$$\pi(n) + 2[\log_2 n] + 1 \leq \pi(6n) - \pi(3n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + 2.$$

Theorem 7.2 is proved.

Theorem 7.3 *For any natural number n*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) + [\log_2 n] - [\log_3 n] - 1. \quad (7.5)$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(n+1)$, where $m = \pi(n)$. We extend these matrices by adding m^* rows corresponding to the squares of primes P_q lying in the interval $3 < P_q \leq [\sqrt{2n}]$. Let's cross out those columns that have at least 2 zeros in the rows $1 < i \leq m_*$, taking into account that

$$M_{m_*,2n}(1) = M_{m_*,n}(1) + M_{m_*,n}(n+1)$$

we have:

1. The number of uncrossed columns in the matrix $M_{m,n}(1)$ will be

$$k_1^* = \pi(n) - [\log_3 \sqrt{n}] + [\log_2 \sqrt{n}] - 1,$$

and the number of crossed out columns is $k_1 = n - k_1^*$. The first column e q is not crossed out, and the numbers 2 and 3 are both prime and of the form 2^r , 3^r .

2. The number of uncrossed columns in the matrix $M_{m,n}(n+1)$ is denoted by k_2^* . We have

$$k_2^* \leq \pi(2n) - \pi(n) + 2,$$

and the total number of crossed out columns will be

$$k_2 \leq \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) + [\log_2 \sqrt{n}] + [\log_3 \sqrt{n}],$$

since among the numbers $n+1, n+2, \dots, 2n$ there is one number of the form 2^r , and perhaps there is one more number of the form 3^r . Arranging the columns of matrices as in Theorem 7.1 and taking into account that the number 1 is not prime, we obtain

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \pi(n) - \pi(\sqrt{2n}) + [\log_2 \sqrt{n}] - [\log_3 \sqrt{n}] - 1.$$

Theorem 7.3 is proved.

Corollary 7.1 *The equation $\pi(2x) = 2\pi(x)$ has exactly 2 solutions: $x_1 = 4$, $x_2 = 10$.*

Proof follows from the fact that our mathematics is 10-iridescent.

Theorem 7.4 *For any natural number n*

$$\pi(n(n+1)) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{1}{2} \log_2 n \right\rfloor - \nu(2n). \quad (7.6)$$

Proof. Consider matrices $M_{m,n^2}(1)$ and $M_{m,n^2}(n+1)$, where $m = \pi(n)$. Since the columns corresponding to the numbers $n+1, n+2, \dots, n^2$ are common for the matrices, we can ignore them and immediately compare the matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(n^2+1)$, where $m = \pi(n^2)$. Let's cross out those columns that have at least one zero in the rows $1 < i \leq m$.

1. The number of uncrossed columns in the matrix $M_{m,n}(1)$ will be

$$k_1^* = [\log_2 n] + 1,$$

and the number of crossed out columns will be $k_1 = n - k_1^*$.

2. The number of uncrossed columns in the matrix $M_{m,n}(n^2+1)$ is denoted by k_2^* . We take into account that all even columns in the matrix $M_{m,n}(n^2+1)$ are crossed out, and from the odd columns only those to which there correspond prime numbers P_q lying in the interval $n^2 < P_q < n(n+1)$. Note that for odd n the number of even columns of the matrix $M_{m,n}(n^2+1)$ is 1 more than the number of even columns of the matrix $M_{m,n}(1)$, and the number of odd columns is 1 less than the number of odd columns of the matrix $M_{m,n}(1)$.

Arranging the columns of matrices according to the maximum number of zeros (first uncrossed, then crossed out) and taking into account that $k_2^* = \pi(n(n+1)) - \pi(n^2)$, we get

$$k_2^* = \pi(n(n+1)) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rfloor - \nu(2n).$$

Theorem 7.4 is proved.

Corollary 7.2

$$\pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \geq \pi(2n) - \pi(n) - \left\lfloor \frac{[3 \log_2 n]}{2} \right\rfloor - 2.$$

$$\left\lfloor \frac{(\pi(2n) - \pi(n) - 1)}{3} \right\rfloor - 1 \leq \pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \leq \left\lfloor \frac{(\pi(2n) - \pi(n) + 1)}{2} \right\rfloor + 1,$$

$$[\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \leq \pi(n) - \left\lfloor \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rfloor + 2.$$

Proof is carried out similarly to the proof of Theorem 7.4, considering the matrices $M_{m,n^2}(1)$ and $M_{m,n^2}(2n+1)$, where $m = \pi(n)$ and matching matrices $M_{m,2n}(1)$ and $M_{m,2n}(n^2+1)$, where $m = \pi(n)$.

7.4 Symmetric remainder matrices, symmetry of numbers on the number axis

Since even numbers (relative to the beginning of the number axis) relative to odd numbers are moved one unit to the right (or to the left, depending on which direction to look), therefore mathematics on the number axis has become one-sided, and mathematical actions have acquired a direction (for example: addition and multiplication - to the right, and subtraction and division to the left) and the results of mathematical operations became non-commutative, i.e. relative.

It is completely incomprehensible to me whether the number “minus” $2n$ is even or odd ?! After all, the minus sign only shows the direction! The one-sided approach of conservative mathematicians to zero as a number turned it into a fiction, and the numbers on the number axis became equal.

Matrix mathematics is free of these shortcomings, in which the global concept of the natural zero O_n in the matrix $M_{m,2n+1}(O_n)$ is introduced, where $\nu_m^*(O_n) = \pi(n)$. In matrix mathematics, by limiting a segment of a number axis, the behavior of mathematical operations on this segment is determined, and then they are extended to large segments. For this, in matrix mathematics, the fundamental concept of a residual matrix has been created, where the zero remainder is no longer a fiction, but a real object.

In order for even and odd numbers to be located symmetrically with respect to some point in matrix mathematics, a matrix of residuals with an odd number of columns is considered. The middle column of such a matrix becomes the axis of symmetry. In matrix mathematics, the matrix $M_{m,2n+1}(O_n)$ is of fundamental importance, where $m = \pi(n)$, the end columns of which correspond to the numbers O_n and $2n$, and the middle column is n , the parity of which does not always depend on the parity of the outermost columns. Therefore, matrix mathematics shows that parity on the number axis is a relative concept, which leads to the relativity of all mathematical operations on the number axis.

7.5 Schinzel's problem

In [1], it is explained in detail how important the distribution of prime numbers in arithmetic progressions is.

Theorem 7.5 *The arithmetic progression $ax_i + b_i$, where $1 \leq b_i < a$, $(a, b_i) = 1$ contains at least*

$$\left\lceil \frac{[\log_2 a]}{2} \right\rceil - 1$$

prime numbers if $0 \leq x_i \leq a$.

Proof is carried out in the framework of matrix mathematics. Consider matrices $N_{m,p}(p|p)$ and $N_{m,p}(p \nmid p + b_i)$ as matrices with step p , where $m = \pi(p - 1)$. The matrix $M_{m,p^2}(p)$ can be represented as

$$M_{m,p^2}(p) = N_{m,p}(p|p) + N_{m,p}(p \nmid p + b_i),$$

where $1 \leq b_i \leq p - 1$, and p is a prime number. Therefore, in matrix mathematics matrices of the form $M_{m,p^2}(p)$, where $m = \pi(p - 1)$, like the progression $px_i + b_i$, where $1 \leq b_i < p$ contains all primes p_k , where $p < p_k < p^2$. In matrices $N_{m,p}(p|p)$ and $N_{m,p}(p \nmid p + b)$, composed of the numbers $p, 2p, \dots, p^2$ and $p + b, 2p + b, \dots, p^2 + b$ we will cross out those columns that have at least one zero in the rows $1 < i \leq m$.

1. The number of uncrossed columns in the matrix $N_{m,p}(p|p)$ will be

$$k_1^* = [\log_2 p] + 2,$$

and the number of crossed out columns will be $k_1 = p - [\log_2 p] - 2$.

2. The number of uncrossed columns in the matrix $N_{m,p}(p \nmid p + b)$ is denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns is denoted by k_2 . Let us take into account that not all even columns in the matrix $N_{m,p}(p|p)$ are crossed out, and from the odd columns only those to which the primes p and p^2 correspond. Note that for odd n the number of even columns of the matrix $N_{m,p}(p|p)$ is 1 more than the number of even columns of the matrix $N_{m,p}(p \nmid p + b)$, and the number of odd columns is 1 less than the number of odd columns of the matrix $N_{m,p}(p \nmid p + b)$. Hence,

$$k_2 \leq k_1 + \left\lceil \frac{[\log_2 p] + 2}{2} \right\rceil,$$

since the number of crossed out even columns of the matrix $N_{m,p}(p \nmid p + b)$ of the number of odd columns of the matrix $N_{m,p}(p|p)$ cannot be more than $\left\lceil \frac{[\log_2 p]}{2} \right\rceil$, because there are only $[p/2]$. However, we have

$$G(m, n, p) = \overline{N}_{m,p}(p \nmid p + b) - \overline{N}_{m,p}(p|p).$$

Hence, $k_2^* \geq \left\lceil \frac{[\log_2 p]}{2} \right\rceil - 1$. Thus, k_2^* shows the number of primes that correspond to the columns of the matrix $N_{m,p}(p \nmid p + b)$. Therefore, k_2^* shows those terms of the arithmetic progression $px_i + b$ that correspond to prime numbers. Thus, the theorem is proved for primes p .

For a composite number a , consider the matrices $N_{m,a}(a|a)$ and $N_{m,a}(a \nmid a + b)$, where $1 \leq b < a$, $(a, b) = 1$. We also cross out those columns that have at least one zero in the rows corresponding to the prime divisors of the number a . Continuing similarly to the proof for the case $a = p$ we get that Shinzel's problem with the help of matrix mathematics is not only proved, but also seriously strengthened.

References

- [1] Prakhar K. Distribution of primes M.: Nauka, 1967.
- [2] Rankin R. A. "The difference between consecutive prime numbers," London Math. Soc. 13 (1938), 242-247.
- [3] Arnold I. V. Number theory, Gostekhizdat, Moscow, 1939.
- [4] Mkrtumyan E. L. On primes in special spaces, chapter 1 of this collection.

Chapter 8

The Goldbach Problem

The article provides a concise and independent solution to the Goldbach problem by the method of residual matrices, which was developed by the author. Some aspects of the deep essence of the problem are revealed.

8.1 Introduction

Goldbach in 1742 suggested that any even number, greater than 4 can be represented as the sum of two primes, and any odd number greater than 7 can be represented as a sum three prime numbers [1].

Currently, the following statements have been proven:

Proposition 8.1 *There is a number N that any odd number greater than N representable as the sum of three primes.*

Proposition 8.2 *“Almost all” even numbers can be represented as a sum of two primes numbers, more precisely, the number of even numbers not exceeding x , which are not representable as a sum of two primes, has order $O(x/\ln^A x)$ as $x \rightarrow \infty$, where A is some a positive number (not necessarily an integer).*

Note that the constant in $O(x/\ln^A x)$ can essentially depend on from A .

Hardy and Littlewood [1] first proved these statements with using a hypothesis that has not yet been proven. I. M. Vinogradov, [1], [2] we managed to prove these statements independently from this hypothesis. All these proofs are very complex and cumbersome.

This chapter provides a concise and independent solution to the problem Goldbach for all numbers by the method of residual matrices, which developed by the author. Revealed some aspects of the deep essence Problems.

8.2 Residual matrices

Consider the following matrix, which we call the remainder matrix:

$$M_{m,n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

where $a_{i,j}$ is the remainder of dividing the number $j - 1$ by P_i , P_i - i th prime, $n \geq 2$ is a natural number, $m = \pi(n)$ - the number of primes not exceeding n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. For example,

$$M_{m,7} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

For any natural number n , the remainder matrix has the following properties:

1) The first column contains only zeros, their number is equal to $m = \pi(n)$.

1a) In the second column there are only ones, their number is $m = \pi(n)$.

2) The last n -th column of the matrix $M_{m,n}$ contains $\nu(n - 1)$ zeros, where $\nu(n)$ is the number of different prime divisors numbers n .

3) If the number $n - 1$ is prime, then the last n -th column of the matrix $M_{m,n}$ contains exactly 1 zero and this zero in the last line.

Consider now the shifted residual matrix $M_{m,n}(\lambda)$, which is obtained by shifting the columns of the matrix $M_{m,n} = M_{m,n}(0)$ on λ columns to the right, where $\lambda \geq 0$ is an integer. Matrix element $a_{i,j}$ $M_{m,n}(\lambda)$ is the remainder of the division of the number $\lambda_j = \lambda + j - 1$ to P_i , P_i is the i th prime, $n \geq 2$ is a natural number, $m = \pi(n)$ is the number of primes numbers not exceeding n , $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$. For example,

$$M_{m,7}(2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Property 2) for shifted matrices is:

2a) The last n -th column of the matrix $M_{m,n}(1)$ contains $\nu(n)$ zeros,

Denoting

$$c(m, n, \lambda) = \overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1),$$

we have [3]

$$\begin{aligned} \overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(\lambda) &= \overline{M}_{m,n}(0) - \overline{M}_{m,n}(1) - (\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1)) = \\ &= \pi(n) - \nu(n) - c(m, n, \lambda), \end{aligned} \quad (8.1)$$

From this we get

$$0 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n).$$

8.3 The middle column of the remainder matrix and its properties

Definition 8.1 *The middle column of the residual matrix is the column equidistant from the extreme columns of this matrix.*

Definition 8.2 *The range of columns in the residual matrices is calculated by the number of columns that are between them.*

Obviously, the remainder matrix $M_{m,n}(\lambda)$ has a middle column if and only if n is odd. The remainder matrix $M_{m,n}(\lambda)$ has a middle column when the outermost columns correspond to numbers of the same parity.

Note an obvious, but important property: If an equal number of columns are crossed out of the two ends of a matrix with a middle column, then the middle column of the matrix of uncrossed columns coincides with the middle column of the previous matrix.

Note that the middle column of the residual matrix may coincide with the middle column of another residual matrix with different sizes. For example, in the remainder matrix $M_{m,2n-1}(1)$, $m = \pi(n)$, the extreme columns correspond to the numbers 1 and $2n-1$, and the middle column corresponds to the number n and coincides with the middle column of the matrix $M_{m,2n+1}(O_n)$, where $m = \pi(n)$, $O_n = \prod_{i=1}^m P_i$.

The smallest residual matrix that has a middle column has three columns.

8.4 The middle column of a matrix and the Goldbach problem

Theorem 8.1 a) Any natural composite even number can be represented as the sum of two primes,

b) Any natural even number greater than 6 can be represented as the sum of two different primes,

c) Any natural even number greater than 8 can be represented as sums of three different primes,

d) Any natural odd number greater than 5 can be represented as sums of three primes,

e) Any natural number greater than 17 can be represented as a sum three different primes,

Proof. It suffices to prove property a) or e), the rest of them follow. Consider the matrix of residuals $M_{m,2n-1}(1)$, where $m = \pi(n)$. Such a matrix has a middle column, since it has an odd number of columns. Two columns of the matrix $M_{m,2n-1}(1)$ are called symmetric if they are equidistant from the middle column. Obviously, the sum of the numbers corresponding to symmetric columns is $2n$, where n is the middle column.

Let's cross out all columns of the matrix $M_{m,2n-1}(1)$, the numbers of which correspond to composite numbers. At the same time, we do not cross out the middle column, which corresponds to the number n . In fact, we carry out the sieve method for the numbers 1, 2, 3, ..., $2n-1$, without crossing out the numbers n .

For any evenness of the number n , to the left of the middle column, uncrossed columns whose numbers correspond to prime numbers P_i , where $2 \leq P_i < n$, as well as the first column (the unit is not prime and non-composite number). Thus, to the left of the middle column, the number of uncrossed columns will be $\pi(n)$. To the right of the middle column, the columns whose numbers correspond to primes P_k , where $n < P_k < 2n$. Thus, to the right of the middle column, the number of uncrossed columns will be $\pi(2n) - \pi(n)$.

For example, for $n = 11$, we have $m = \pi(11) = 5$. In the matrix $M_{m,2n-1}(1) = M_{5,21}(1)$ to the left of the middle column $n = 11$, the uncrossed columns correspond to the numbers 1, 2, 3, 5, 7; and to the right of the middle column, the uncrossed columns correspond to the numbers 13, 17, 19. If $2n-1$ is a prime number, then we do not consider it, since it will be symmetric uncrossed first column. So, to the right of the middle column, we

have 3 uncrossed columns, which correspond to the numbers 13, 17, 19. On the left, they correspond to 3 symmetric odd columns. But to the left of the middle column we have only 1 crossed out odd column corresponding to the composite number 9, the 13th column will be symmetric to it (with respect to n). Therefore, in addition to the 11th column, there are two more pairs of symmetric uncrossed columns (17 and 5) and (19 and 3), and the sum of the numbers corresponding to the symmetric columns is $2n = 22$).

Obviously the column is symmetric an uncrossed column can be either strikethrough or uncrossed. It remains to prove that for any n there is at least one pair symmetric uncrossed columns (and the sum of the numbers of the corresponding symmetric columns is equal to $2n$) and the Goldbach problem will be solved.

In the case of the main matrix $M_{m,2n+1}(O_n)$, where $m = \pi(n)$, the extreme columns of which correspond to the numbers O_n and $2n$, to the right of the middle column we have $\pi(2n) - \pi(n)$ uncrossed columns. On the left they correspond to $\pi(2n) - \pi(n)$ symmetric odd columns. But the matrix can contain uncrossed simple columns p_i^* and p_k^* , which are symmetrically located relative to the middle column and $p_i^* + p_k^* = 2n$. An example of such a pair is the uncrossed columns p_i and p_k , located at the closest distances from the middle column n (in one direction or the other), if the distance from p_i to the number 1 is the distance from p_k to the number $2n - 1$, or if the distance from p_k to the number 1 is equal to the distance from p_i to the number $2n - 1$. Because for any evenness of the number n , the even and odd columns will be located equidistant from n (the range is calculated by the number of columns).

As in the matrix $M_{m,2n-1}(1)$ even columns relative to odd columns moved by one to the right and the number of even columns (corresponding to even numbers) in the matrix $M_{m,2n-1}(1)$ is one less than the number of odd columns, then to the right of n is crossed out by $2 \left\lceil \frac{[\log_2 n] + 1}{2} \right\rceil - 1$ more columns than on the left, so regardless of the parity of n , not only even columns are arranged symmetrically with respect to the n column, but also odd. In the matrix $M_{m,2n-1}(1)$, crossing out those columns p_k that are symmetrically located to some composite columns from the interval $[1, n]$ and those columns p_i , which are located symmetrically to some other composite columns from the range of natural numbers $[n, 2n - 1]$. Note that in the matrix $M_{m,2n-1}(1)$ there are still more than one pair of p_i^* and p_k^* columns that are symmetric and $p_i^* + p_k^* = 2n$. This is due to the fact that the symmetry of the columns on the numerical axis, in a matrix with a middle column, is unambiguous, i.e. a column from the $[1, n]$ interval can be symmetric to only one column from the $[n, 2n - 1]$ interval. Therefore, for $n > 5$, we have

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq [\log_2 n] - 1, \quad (8.2)$$

or

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lceil \frac{\pi(n) + [\log_2 n] + 1}{2} \right\rceil - \nu(2n). \quad (8.3)$$

Comparing the values of the formulas (8.2), (8.3) and considering $\nu(n - 1)$, $\nu(n)$, $\nu(n + 1)$ or $\nu(2n - 1)$, $\nu(2n)$, $\nu(2n + 1)$, we arrive at the proof of items a), b) and c) of Theorem 8.1.

Regarding items d) and e), they can be obtained from items a), b) and c) by subtracting a prime from any odd number and presenting the resulting even number as the sum of two primes. The same can be obtained by considering the columns of the matrix $M_{m,2n-1}(1)$, where $m = \pi(n)$, which correspond to the numbers $2n - 4$, $2n - 3$, $2n - 2$, $2n - 1$ and $2n$. Of the prime divisors of these numbers, you can always find 3 such numbers, the sum of which would be $2n - 1$. Thus, Theorem 8.1 is completely proved.

Theorem 8.2 *Any natural composite even number $2n$ can be represented as the sum of two primes is at least $\frac{1}{2} [\log_2 n]$ times.*

Proof.

1) First, assume that $n = p$ is a prime number. You need to answer the question: except $p + p = 2p = 2n$ must there be a pair of distinct primes p_i and p_k , for which

$$p_i + p_k = 2p = 2n, \quad (8.4)$$

and how many more such pairs can there be?

By virtue of the properties of the relations (1.6), (8.2) and (8.3) we have

$$|L_m(p_i) - L_m(p_k)| = |\nu_m^*(p_i) - \nu_m^*(p_k)| = 1, \quad (8.5)$$

$$|L_m(2^r) - L_m(p_i)| = |\nu_m^*(2^r) - \nu_m^*(p_i)| = 0, \quad (8.6)$$

$$|L_m(2^r) - L_m(p_k)| = |\nu_m^*(2^r) - \nu_m^*(p_k)| = 1, \quad (8.7)$$

where $1 < 2^r < p$. Since the equalities (8.5) - (8.7) are valid for all combinations of columns (numbers) 2^r , p_i and p_k , then taking into account (8.2) - (8.7) we come to the conclusion that the number of pairs of different primes p_i and p_k , for which $p_i + p_k = 2n$, is not less than $\frac{1}{2} [\log_2 n]$, because prime numbers like $p_i^* = 2^r \pm 1$, $p_i^* < p$ have their partners p_k^* , where $p_i^* + p_k^* = 2p$.

2) Suppose n is a composite number. Since the number of primes p_i that have symmetric (relative to the middle column) companions from primes p_k depends on the value $[\log_2 n]$, which differs little from the case $n = p$ therefore, taking into account (8.2) - (8.7)), we obtain the proof of Theorem 8.2.

Thus, Goldbach's problem is completely solved and greatly strengthened!

Note. If Goldbach's problem were formulated as:

Any natural even number can be represented as the difference of two primes,

then its proof would be much easier, the interpretation of the number axis on the part of mathematicians and mathematicians would change without unnecessary difficulties would manage with only whole numbers.

P. The S. The proof of the Goldbach problem by Professor Vinogradov is perceived differently. In fact, Professor Vinogradov proved Goldbach's problem or refuted?! After all, the number greater than which all even numbers are representable as a sum of two primes, is so large that even with modern technology it is impossible to determine it! It turns out that there are a huge number of even numbers about which this proof says nothing. Not to mention negative even numbers. From all this it follows that, according to the logic of existing mathematics, negative even numbers also do not exist, as well as negative primes do not exist. But doesn't this contradict the original definition of the number axis and lead to the absurdity of the main axiom of existing (classical) mathematics, which says that "the number zero 0" is a multiple of all integers?!

It seems to me, regardless of everything, Professor Vinogradov proved that existing mathematics is helpless for solving problems in which the relationship of objects of "infinitely large" and "infinitely small" sizes is considered. This conclusion seems to me much more valuable than the proof of Goldbach's problem itself!

Yerevan, 2013.

References

- [1] Prakhar K. Distribution of prime numbers, Moscow: Nauka, 1967.
- [2] Arnold I. V. Number theory Moscow: Nauka, 1939.
- [3] Mkrtumyan E. L. Chapters 1 and 6 of this collection.

Chapter 9

Residual Matrix Properties

Definition 9.1 *Remainder matrices that have the same size, width $\pi(n)$, length n , are called similar.*

Example. Matrices $M_{m,n}(\lambda_1)$ and $M_{m,n}(\lambda_2)$, where $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| > 0$, λ_1, λ_2 are natural numbers.

Definition 9.2 *Such matrices that have common columns are called shifted remainder matrices.*

Example. Matrices $M_{m,n}(\lambda_1)$ and $M_{m,n}(\lambda_2)$, where $m = \pi(n)$, $1 < |\lambda_1 - \lambda_2| < n$.

Definition 9.3 *Such matrices that do not have common columns are called opposite residual matrices.*

Example. Matrices $M_{m,n}(\lambda_1)$ and $M_{m,n}(\lambda_2)$, where $|\lambda_1 - \lambda_2| > n$.

Theorem 9.1 *The matrix $M_{m,kn}(1)$, where $m = \pi(n)$, $n > k$ is a natural number, can be represented as the sum of k opposite matrices, each of which has n columns...*

The proof is obvious, since

$$M_{m,kn}(1) = M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + M_{m,n}(2n+1) + \cdots + M_{m,n}(n(k-1)+1).$$

Theorem 9.2 *The matrix $M_{m,2n}(1)$ where $m = \pi(n)$ can be represented as the sum of even and odd matrices.*

The proof is trivial, since

$$M_{m,2n}(1) = N_{m,n}(2 \nmid 1) + N_{m,n}(2 \mid 2), \quad m = \pi(n).$$

Theorem 9.3 *If one of the extreme columns and the middle column of the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, λ is a natural number, contains zero remainder in any row $1 < i \leq m$, then the other extreme column of the same matrix contains zero remainder in the same row.*

Proof. Suppose λ_a and λ_b correspond to the extreme columns, and λ_c - to the middle column of the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$

1) Let's say $2 \nmid \lambda_a, 2 \nmid \lambda_b$,

but $p_i | \lambda_a$ and $p_i | \lambda_c$, where $2 < p_i \leq n$ is a prime number. Therefore, $p_i | \lambda_b$ and vice versa.

2) Let's say $2 | \lambda_a, 2 | \lambda_b$, but $p_i | \lambda_b$ and $p_i | \lambda_c$, where $2 < p_i \leq n$ is a prime number, therefore, $p_i | \lambda_a$ and vice versa.

Corollary 9.1 *If $p_i | \lambda_a, p_i | \lambda_b, p_i | \lambda_c$, then $p_i | n$ and the number $\lambda + n$ corresponds to the middle column of the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$.*

Proof trivially follows from the proof of Theorem 1.3.

Corollary 9.2 *The middle column of the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, has no zero remainder in the rows $1 < i < m$, if at least one of the extreme columns has no zero residues in the lines $1 < i \leq m$.*

Proof. By Theorem 9.3 it is known that if in the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$ the number n contains a prime odd divisor $p_i \leq n$, then $(\lambda_a, \lambda_c) \neq 1$, $(\lambda_a, \lambda_b) \neq 1$, $(\lambda_b, \lambda_c) \neq 1$, i.e. have a common divisor. Therefore, $(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) \neq 1$. But if λ_a or λ_b do not have a common prime odd divisor $p_i \leq n$, then we get $(\lambda_a, n) = 1$, $(\lambda_b, n) = 1$, (i.e. λ_a and λ_b are coprime numbers), therefore $(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) = 1$.

Theorem 9.4 *If the middle column of the matrix $M_{m,2n-1}(1)$, where $m = \pi(n)$, contains at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m$, then one of these zero remainders is in the line $i = 2$ or in the line $i = 3$.*

Proof. Consider the matrix $M_{m,2n+2}(0_n)$. Here 0_n is a natural zero

$$0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n).$$

This matrix is obtained from the matrix $M_{m,2n-1}(1)$, adding to it from two sides along the column, which correspond to the numbers 0_n and $2n$. It is clear that the middle columns of these two matrices coincide and correspond to the number n .

1) Let $2 \nmid n$.

a) For $3 \nmid n$ the theorem is clear, since by the hypothesis of the theorem $n \neq 3^r$.

b) For $3 \nmid n$, or $3 | n - 1$ or $3 | n + 1$. In both cases $5 | 0_n$, because $5 | 0_n$ and $n \neq 5^r$.

2) Let $2 | n$, arguing also, we come to the conclusion that the theorem is proved.

Corollary 9.3 *If the middle column of the matrix $M_{m,2n-1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, contains at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m$, then one of these zero residues is in the line $i = 2$ or in the line $i = 3$.*

Proof. Since for any parity λ the number n corresponds to the middle column of the matrix $M_{m,2n-1}(\lambda)$, the proof of Corollary is trivial.

Chapter 10

Square matrices. Focuses of residual matrices

Definition 10.1 *The remainder matrix $M_{m,n}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$ is called square if the number of its columns n is equal to a perfect square a natural number.*

Definition 10.2 *If a column of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ has zero residuals in the same rows as the extreme columns of the same matrix, then such a column is called the focus, and the outermost columns are called the side focus of this matrix.*

For example, for $\lambda = 9$, $n = 8$, $m = \pi(4) = 2$, the matrix $M_{2,8}(9)$ has the form

$$M_{2,8}(9) = \begin{bmatrix} P_i \setminus \lambda_j & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

The column corresponding to the number 12 is the focus.

Theorem 10.1 *For any number a , the matrix of residuals $M_{m,2a+2}(a^2)$, $m = \pi(a+1)$ has a focus (and hence side focuses).*

Proof. The matrix $M_{m,2a+2}(a^2)$, $m = \pi(a+1)$ is composed of the numbers $a^2, a^2 + 1, \dots, (a+1)^2 = b^2$. The first column corresponds to the number a^2 , which is divisible by a . The last column corresponds to the number b^2 , which is divisible by $b = a+1$. Therefore, the column corresponding to the number $a(a+1)$ is the focus, and the columns corresponding to the numbers a^2 and b^2 are secondary focuses. The theorem is proved.

Theorem 10.2 *The difference of the squares of two natural numbers has a focus.*

Proof. Consider the matrices $M_{m,a^2}(1)$ and $M_{m,b^2}(1)$, where $0 < a < b$, $m = \pi(b)$.

Since the equality

$$\nu(a^2b^2) = \nu(a^2) + \nu(b^2) = \nu(ab) = \nu(a) + \nu(b).$$

Let s be the focus of the difference of matrices $M_{m,a^2}(1) - M_{m,b^2}(1)$. Then, depending on the value of the difference $(b-a)$, the following relations hold:

- 1) $a^2 < s < b^2$ if $a^2 < ab < b^2$.
- 2) $a < s < a^2$, if $a < \frac{b}{2}$.

Theorem 10.3 *There is a relation*

$$\pi(n) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) + 1. \quad (10.1)$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,2n}(1)$ and $M_{m,2n}(2n+1)$, where $m = \pi(n)$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which contains at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m$. Then we have

1) In the matrix $M_{m,2n}(1)$ the number of uncrossed columns

$$k_1^* \geq [\log_2 n] + 1 + \pi(2n) - \pi(n).$$

At the same time, it is taken into account that the column corresponding to the number 1 is also not crossed out.

2) In the matrix $M_{m,2n}(2n+1)$ the number of uncrossed columns

$$k_2^* = \pi(4n) - \pi(2n) + 1.$$

Let's arrange the columns of matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out. Comparing the matrices with such an arrangement of columns, we obtain the relation (10.1). This follows from the fact that

$$\overline{M}_{m,2n}(2n+1) - \overline{M}_{m,2n}(1) = c(m, n, 2n+1).$$

Theorem 10.4 *There is a relation*

$$2[\log_2 n] - 1 \leq \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) \leq 2[\log_2 n] + 1. \quad (10.2)$$

Proof. Consider the matrices

$$N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) \text{ and } N_{m,\lambda}(2|2), \quad \lambda = \left[\frac{n^2}{2} \right], \quad \pi((n-1)^2).$$

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which contains at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq \pi((n-1)^2) = m$. Then we have

1) In the matrix $N_{m,\lambda}(2 \nmid 1)$ the number of uncrossed columns

$$k_1^* = \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) + 1.$$

2) In the matrix $N_{m,\lambda}(2|2)$ the number of uncrossed columns

$$k_2^* = 2[\log_2 n].$$

Let's arrange the columns of matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out. Comparing matrices with such an arrangement of columns, we obtain the ratio (10.2).

Corollary 10.1 *The following relation holds*

$$\left[\frac{\pi(n) + [\log_2 n] - 1}{2} \right] - 1 \leq \pi(4n) - \pi(2n) \leq \pi(n) + 1. \quad (10.3)$$

Proof.

Consider the matrices $N_{m,2n}(2|2)$ and $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$, where $m = \pi(2n)$, $m^* = \pi(n)$.

1) In the matrix $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$, cross out all those columns, each of which corresponds to a composite number. The number of uncrossed columns in it is

$$k_1^* = \pi(4n).$$

2) The matrix $N_{m,2n}(2|2)$ is even, so we divide each of its columns by the square of a prime number p_q , where $2 < p_q \leq \sqrt{4n}$. We enter the resulting residuals into the corresponding columns of this matrix. Let's cross out all those columns of this matrix, each of which contains at least two zero residuals $1 < i < m$, $1 < i^* < m^*$. The number of uncrossed columns in it will become

$$k_2^* = \pi(2n) + [\log_2 n] + 2.$$

since among the numbers $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ there is only one number of the form 2^r .

Let us arrange the columns of the matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out. Comparing the matrices with such an arrangement of columns, we obtain the ratio (10.3).

Chapter 11

Average residue matrix. Symmetric matrices

Definition 11.1 *A matrix that has a middle column that corresponds to a natural number is called a middle matrix.*

Theorem 11.1 *If a matrix has a middle column, then it also has a middle matrix.*

Proof. Consider the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda), m = \pi(n)$. It has a middle column, because for any parity of the number λ , its outermost columns correspond to numbers of the same parity. For $2|\lambda$, then $2|\lambda + 2n$, and for $2 \nmid \lambda$, then $2 \nmid \lambda + 2n$.

From the edges of this matrix, crossing out the same number of n_1 columns, where $1 \leq n_1 < n$, the matrix formed from the uncrossed columns will become the average matrix of the remainders of the previous matrix.

Corollary 11.1 *A matrix with a middle column has a certain number of middle matrices, the smallest of which contains 3 columns.*

This is obvious from Theorem 11.1.

Corollary 11.2 *Any number can become the middle column of a certain number of middle matrices.*

Proof. Take any natural number N . Divide this number into primes $\pi(n), n < N$. From the resulting residuals, we will compose the column N , which corresponds to the number N . Dividing the numbers $(N - n), (N - n + 1), \dots, N + n$ by primes $\pi(n)$, we compose from their remainders the columns that, together with the column N , form the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda - n), m = \pi(n)$. These columns are located on both sides of the N column. This new matrix is the middle matrix of the original matrix $M_{m,2N+1}(1), m = \pi(n)$. The middle column of this matrix corresponds to the number N . Corollary 11.2 is proved.

Corollary 11.3 *If from two sides of the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda), m = \pi(n)$, the middle column of which corresponds to the number λ^* strike out columns*

$$\lambda^* - n_1, \lambda^* - n_1 + 1, \dots, \lambda^*, \lambda^* + 1, \dots, \lambda^* + n_1,$$

where $1 < n_1 < n$, then the uncrossed columns together with the λ^* column will form a matrix, which is the middle matrix of the previous matrix.

Proof is trivial.

Note. Theorem 11.1 by its consequences limits the “positive” section of the number axis, which is subject to study. But taking the number 0_n as a natural one, we can extend the properties of the middle column and the middle matrix to the negative part of the numerical axis, considering 0_n as the middle column of the matrix, the extreme columns of which correspond to the numbers $-a$ and $+a$.

Theorem 11.2 *The middle column of the matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $2 < p$ is a prime number, $m = \pi(p)$, corresponds to a prime number P_k , $P_k > P$.*

Proof. Consider the matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$. Since its extreme columns correspond to odd numbers, it has a middle column. Let's denote it λ^* . On both sides of this matrix, cross out those columns that have zero residuals in the rows $1 \leq i \leq m$.

Note that the number λ^* is not crossed out, because, not may contain odd prime divisors $\leq p$. Since λ^* is also the middle column of the matrix $M_{m,p^2+2}(0_n)$. Otherwise, we get that the number 1 is composite. The number λ^* is at equal distances from the number 0_n and from the number $p^2 + 1$. But it should not be confused with the arithmetic mean of 1 and p^2 , or (-1) and p^2 . Therefore, the divisor of the number λ^* is not in the column that corresponds to the number $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$, $n = p$, and in the column that corresponds to the number 0 (zero), and we assume that it is a multiple of all numbers.

The number λ^* will get zero remainder only when the width of the matrix $M_{m,p^2}(1)$ becomes equal to m_* , i.e. when will we have $m = m_* = \pi(\lambda^*)$.

Thus, we get that λ^* does not have a prime divisor $\leq [\sqrt{2p^2}]$, therefore λ^* is a prime number. Theorem 11.2 is proved.

Corollary 11.4 *If the number $p^2 - 1$ is not a multiple of 5, then the number $p^2 + 1$ is a multiple of 5, where p is a prime number.*

Proof. If p^2 ends with 1 (p ends with 1 or 9), then $p^2 - 1$ is a multiple of 5. And if p^2 ends with 9 (p ends with 3 or 7), $p^2 + 1$ is a multiple of 5. The corollary is proved.

Theorem 11.3 *The equation*

$$x^2 + y^2 = z^2, \quad (11.1)$$

where $0 < x < y < z$, $(x, y) = 1$, $(x, z) = 1$, $(y, z) = 1$, has a solution in integers if at least one of these numbers does not contain more than two prime odd divisors.

Proof.

It is known that the numbers

$$z = a^2 + b^2, y = a^2 - b^2, x = \sqrt{2ab} \quad (11.2)$$

satisfy the equation (11.1) if and only if a and b are numbers of different parity and $(a, b) = 1$.

The symmetry of the equation (11.2) allows us to consider the case

1) $2 \nmid a$, $2 \mid b$, $2 \nmid c$.

2) $2 \nmid a$, $2 \nmid b$, $2 \mid c$.

Because one of the numbers a, b, c must be even.

Consider the foci of matrices composed of the numbers $z^2 - a^2 = b^2$ and $z^2 - b^2 = a^2$ (See Theorem 10.2).

It is easy to verify that the condition $(a, z) = 1, (z, b) = 1, (a, b) = 1$ is necessary but not sufficient for the numbers a, b, c to satisfy the equation (11.1). Because in the formula (11.2), the value of x must be rational (positive integer). Taking into account Theorems 9.3, 9.4, we obtain $a = 2^r$, $b = p^s$, where p is a prime number, $2 \nmid r, 2 \mid s$, but s can be 0 (zero).

Definition 11.2 *Such matrices, which in the rows $1 < i \leq m = \pi(n)$ have an equal number of zero and nonzero remainders, are called symmetric remainder matrices.*

Theorem 11.4 *A residual matrix with a middle column has a certain number of symmetric matrices.*

Proof. Consider the matrix $M_{m, kn}(1)$, where $2 \mid k, 2 \nmid n, 1 < k \leq n - 1, m = \pi(n)$. It has a middle column because its outermost columns correspond to odd numbers.

We represent the matrix $M_{m, kn}(1)$ in the form

$$\begin{aligned} M_{m, kn}(1) &= M_{m, n}(1) + M_{m, n}(n+1) + \dots + M_{m, n}(kn+1) = \\ &= M_{m, 2n}(1) + M_{m, 2n}(2n+1) + \dots + M_{m, 2n}(kn+1) = \\ &\dots \dots \dots \dots \\ &= M_{m, \lambda}(1) + M_{m, \lambda}(\lambda+1) = N_{m, \lambda}(2 \nmid 1) + N_{m, \lambda}(2 \mid 2). \end{aligned}$$

where $\lambda = \left\lfloor \frac{kn}{2} \right\rfloor$.

It is easy to see that all matrices

$$M_{m, n}(n+1), \dots, M_{m, n}(kn+1)$$

are symmetric with the matrix $M_{m, n}(1)$ and with each other. Crossing out all those columns of these matrices, each of which has at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m$, we obtain the theorem. Because each of them will have uncrossed $\lfloor \log_2 n \rfloor$ columns, but it is not necessary that these uncrossed columns correspond to prime numbers. Among them there can be numbers like 2^r , $n < 2^r < kn$ and numbers like $2^r p_k$, $n < p_k < kn$. This is evidenced by the formula $Lm(j) + \nu(j) = \pi(n)$, where j is the ordinal number of the column of the given matrix, $p_k > n$ is a prime number.

The same can be said about all symmetric matrices that are between two equal signs. While not all uncrossed columns of symmetric matrices correspond to prime numbers, they simultaneously provide a way to pinpoint the cryptography problem if we assume that $n = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$ or $n = \lfloor \log_2 N \rfloor$, where $N \gg n$.

Explanation.

The proofs of the theorems and consequences of this chapter suggest that the main task of mathematical calculations on the number axis is to find out the true essence of the number 0 (zero) as the beginning of the number axis (the beginning of the calculation). Residual Matrix Theory, using the notion of natural zero (0_n), made it easier to solve this problem. Because from $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, where $m = \pi(n)$, it follows $Lm(n) + \nu_m(n) = \pi(n)$... It turned out that not only the column of the matrix $M_{m, 0_n}(1)$, but also $M_{m, 0_n}(2)$, $M_{m, 2 \cdot 0_n}(2 \cdot 0_n + 1)$, i.e. numbers 1, $0_n + 1$, $2 \cdot 0_n + 1$ are not multiples of prime numbers p_i , $1 < p_i < 0_n$, i.e. they are prime numbers, or more precisely, the concept of a prime number is relative and depends on the direction of calculation on the number axis.

Thus, the concept of any number on the number axis has become relative. Therefore, mathematics on the number axis gives us relative results and this must be reckoned with. Before proving all theorems and corollaries, this was taken into account. I think we will not forget about this in the future, especially that the matrix $M_{mkn}(1)$ can be divided into similar matrices with length k and width $m = \pi(k)$.

Chapter 12

Prime numbers in certain intervals of numbers, and an estimate of their number from both sides

Theorem 12.1

$$\pi(n) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1.$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(n+1)$, where $m = \pi(n)$. Let us expand these matrices, i.e. each number corresponding to each column of these matrices is also divided by the square of the prime number p_q , where $2 < p_q < \sqrt{2n}$, and by 2^r , where $\sqrt{n} < 2^r \leq \sqrt{2n}$. The resulting residuals are written in the corresponding column of this matrix. The general view of the extended matrix is denoted by $M_{m*,n}(\lambda)$, $m_* = m + m^*$, where $m = \pi(n)$, $m_* = \pi(\sqrt{2n})$, $p_q \neq 2$. The difference of zero residuals has the form

$$\overline{M}_{m*,n}(n+1) - \overline{M}_{m*,n}(1) = c_*(m_*, n+1, n). \quad (12.1)$$

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which contains at least two zero remainders.

1) In the matrix $M_{m*,n}(1)$, we denote the number of uncrossed columns by k_1^* . We have

$$k_1^* \leq \pi(n) + [\log_2 n].$$

And the number of crossed out columns k_1 , where

$$k_1 \geq n - k_1^* = n - \pi(n) - [\log_2 n].$$

2) In the matrix $M_{m*,n}(n+1)$, we denote the number of non-blackened columns by k_2^* . We get

$$k_2^* = \pi(2n) - \pi(n) + 1.$$

And the number of crossed out k_2 columns is

$$k_2 = n - \pi(2n) + \pi(n) - 1.$$

Because among the numbers $n+1, n+2, \dots, 2n$ there is one number of the form 2^r , where $n < 2^r \leq 2n$.

Let's arrange the columns of the matrices according to the maximum number of zero residuals so that the uncrossed columns are located first, and then the crossed out ones.

Taking into account the ratio (5.1) and the fact that the number of columns in the matrices are equal to each other, we obtain the ratio

$$\pi(n) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1.$$

The theorem is proved.

Theorem 12.2 *Inequality is valid*

$$[\pi(n)] - [\log_3 \sqrt{n}] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq [\pi(n)] + [\log_3 \sqrt{n}] + 1.$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(n+1)$ where $m = \pi(n)$. We extend them in the same way as in Theorem 12.1. Except now $2 \leq p_q \leq \sqrt{2n}$, but $p_q \neq 3$.

Let's cross out all those columns of these extended matrices, each of which contains at least two zero remainders.

- 1) In the matrix $M_{m*,n}(1)$, the number of uncrossed columns k_1^* is

$$k_1^* = \pi(n) + [\log_3 n].$$

And the number of crossed out columns k_1 is

$$k_1 \leq n - k_1^* = n - \pi(n) - [\log_3 n],$$

since the columns corresponding to the numbers 1,2,3 are not crossed out, and the numbers 2 and 3 are both simple and of the form $2^r, 3^r$.

- 2 In the matrix $M_{m*,n}(n+1)$, we denote the number of unblacked columns by k_2^*

$$k_2^* \leq \pi(2n) - \pi(n) + 1,$$

because perhaps there is a number 3^r such that $n < 3^r < 2n$. Denoting the number of crossed out columns by k_2 , we obtain that k_2 satisfies the inequality

$$k_2 \geq n - \pi(2n) + \pi(n) - 1.$$

Arranging the columns of matrices in the same way as in the proof of Theorem 12.1, we obtain

$$\pi(n) - [\log_3 \sqrt{n}] - 1 \leq \pi(2n) - \pi(n) \leq \pi(n) - [\log_3 \sqrt{n}] + 1.$$

Theorem 12.2 is proved.

Theorem 12.3 *The following relations hold*

$$2 \left(\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - [\log_2 n] \right) - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - [\log_2 n] + 1.$$

and

$$2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left\lfloor \frac{3\pi(n)}{4} \right\rfloor - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left\lfloor \frac{\pi(n)}{4} \right\rfloor + 1.$$

Proof. Consider the matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(\lambda)$, $\lambda = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$. Let's expand this matrix, i.e. each number corresponding to each column of this matrix is divided by the square of a prime p_q , where $2 \leq p_q \leq \lfloor \sqrt{2n^2} \rfloor$. And we also divide by 2^r , where $n < 2^r \leq 2n$. We write the resulting residuals into the corresponding columns of the matrix.

The width of the matrix becomes $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n) = m + m^*$, where $m = \pi(\lambda)$, $m^* = \pi(n)$, considering the string that matches the number 2^r .

Since the extended matrix $M_{m_*,n^2}(1)$ can be represented as

$$M_{m_*,n^2}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1),$$

where $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n)$. Line numbers $i_* = i + i^*$, $\lambda = \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$.

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders, in the rows $1 < i \leq m$, $1 < i^* \leq m^*$.

1) In the matrix $M_{m_*,\lambda}(1)$, the number of uncrossed columns $k_1^* = \pi(\lambda) + \lfloor \log_2 n \rfloor$, and the number of strikethrough columns is $k_1 = \lambda - \pi(\lambda) - \lfloor \log_2 n \rfloor = \lambda - k_1^*$.

2) In the matrix $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$, the number of uncrossed columns is denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns - k_2 . We obtain the relations

$$k_2^* \leq k_1^* - 2 \lfloor \log_2 n \rfloor + 1,$$

or

$$k_2^* \geq k_1^* - 3 \lfloor \log_2 n \rfloor - 1.$$

Because the number of crossed out even columns (correspond to even numbers) in the matrix $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$ is greater by the amount

$$\lfloor \log_2 n \rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } 2|n \\ 0, \text{ if } 2 \nmid n \end{array} \right\},$$

than the number of crossed out even columns of the matrix $M_{m_*,\lambda}(1)$.

Arranging the columns of the matrix $M_{m_*,\lambda}(1)$ and the matrices $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$ according to the maximum number of zero residuals so that at one end there are crossed out columns, and then not crossed out, and matching matrices in such an arrangement of columns, taking into account the ratios

$$\overline{M}_{m_*,\lambda}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m_*,\lambda}(1) = c_*(m_*, n, \lambda),$$

$$M_{m_*,n^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2)$$

get

$$2 \left(\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \lfloor \log_2 n \rfloor \right) - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \lfloor \log_2 n \rfloor + 1.$$

$$2 \lfloor \log_2 n \rfloor - 1 \leq k_1^* - k_2^* \leq 3 \lfloor \log_2 n \rfloor + 1,$$

and

$$2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left\lfloor \frac{3\pi(n)}{4} \right\rfloor - 1 \leq \pi(n^2) \leq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) - \left\lfloor \frac{\pi(n)}{4} \right\rfloor + 1.$$

Theorem 12.3 is proved.

Corollary 12.1 *The relation*

$$\pi(n(n+1)) - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1 \leq \pi(n^2) \leq \pi(n(n-1)) + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1.$$

Proof. Consider the matrices $M_{m_*,n^2}(1)$ and $M_{m_*,n^2}(n+1)$, where $m = \pi(n^2) \dots$ Similarly to Theorem 12.3, we extend them and cross out their columns.

1) In the matrix $M_{m_*,n^2}(1)$, the number of uncrossed columns is

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n]$$

2) In the matrix $M_{m_*,n^2}(n+1)$, the number of uncrossed columns

$$k_2^* \leq \pi(n^2) - \pi(n) + [\log_2 n].$$

Since the number of those columns, each of which contains at least two zero residuals, the matrix $M_{m_*,n^2}(n+1)$ has a maximum of $\pi(n) - [\log_2 n] + 1$ is greater than the crossed out columns of the matrix $M_{m_*,n^2}(1)$, we get the formula

$$\pi(n(n+1)) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq \pi(n(n-1)) + [\log_2 n] + 1.$$

Corollary 12.1 is proved.

Theorem 12.4 *If $m = \pi(n)$, then the relation*

$$m^2 - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq m^2 + [\log_2 n] + 1.$$

Proof. Consider the matrix $M_{m_*,n^2}(1)$, it can be represented as

$$M_{m_*,n^2}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(\lambda+1), \quad (12.2)$$

where $m_* = \pi(\lambda) + \pi(n)$, $\lambda = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$.

The matrices from the formula (12.2) have been expanded and the columns in them have been deleted, as in Theorem 12.3. From columns $\pi(\lambda) + [\log_2 \sqrt{\lambda}]$, which are not crossed out in the matrix $M_{m_*,\lambda}(1)$ one column that corresponds to the number 1 has no zero remainder (empty). And each of the other $\pi(\lambda) + [\log_2 \sqrt{\lambda}] - 1$ columns has one zero remainder.

In the matrix $M_{m_*,\lambda}(\lambda+1)$, the maximum $\pi(n) + [\log_2 n] + 1$ zero residues have been added in the crossed out columns.

Since for $2|n$ the number of crossed out even columns of the matrix $M_{m_*,\lambda}(\lambda+1)$ is greater than the number of crossed out even columns of the matrix $M_{m_*,\lambda}(1)$ by $[\log_2 n] + 1$, and the number of uncrossed odd columns is less than the maximum $\pi(n) - [\log_2 n] - 1$, therefore, taking into account the relation

$$\overline{M}_{m_*,\lambda}(\lambda+1) - \overline{M}_{m_*,\lambda}(1) = c_*(m_*, m, \lambda+1),$$

get

$$m^2 - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(n^2) \leq m^2 + [\log_2 n] + 1,$$

where $m = \pi(n)$.

Because if n^2 shows the number of columns of the matrix $M_{m,n^2}(1)$, then m^2 and $[\log_2 n]$ characterize the difference in the quantities columns of matrices $M_{m,\lambda}(\lambda+1)$ and $M_{m,\lambda}(1)$, which correspond to prime numbers. Theorem 12.4 is proved.

Corollary 12.2 *There is a relation*

$$2\pi(n^2) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) \leq 2\pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Proof. Consider the matrix $M_{m*,2n^2}(1)$, expanding it and crossing out columns as in Theorem 4.3, and arguing similarly to the proof of Theorem 12.4, we obtain Corollary 12.2.

Note. Taking the number “Zero” to be a multiple of all integers, it is automatically assumed that the number 1 (1 is the scale of the numerical axis) is not divisible by any number. This leads us to the fact that a composite number has at least two prime divisors, i.e. prime number is divisible only by 1, and number 1 is “absolutely prime number”, because has no other divisors on this number axis.

Therefore, on the numerical axis, the number is not a multiple of itself, but a multiple of its ordinal number.

We can agree that this is more logical than thinking that the number is divisible by itself, because having 30 apples, we can give 6 children 5, 5 children 6, 10 3, 15 2, and 30 1. If from To give 30 children only one 30 apples, and leave 29 children without apples, it will be not only unfair, but also illogical. This example shows that the process of dividing on the numerical axis also depends on the origin, and the number n is distant from point 0 by n segments of unit length, and no one can guarantee that any of these segments can be divided into n_1 equal parts, where $1 < n_1 < n$. Unless we assume in advance that this unit segment consists of n_1 equal parts. Thales’ theorem on the number axis is imprecise, and has led existing mathematics to a “vicious circle” of continuity of the number axis and the relativity of mathematical operations on the number axis. We can divide an arbitrary segment into two equal parts using a compass and a ruler. But then the problem arises, to which half should the center point be assigned? Indeed, on the numerical axis, numbers are represented by segments. It is in this sense that we believe that Thales’ theorem is inaccurate.

Existing mathematics is based on the axiom that 0 is a multiple of all integers, i.e. 0 is divisible by all integers without a remainder. But on the number axis, this axiom leads to limitations. Or, more precisely, to contradictions, such as that the number “Zero” is equal to the sum or difference of all numbers. Without taking them into account, we are faced with a huge number of problems in various branches of mathematics. The goal of mathematics is not only to find and use different relationships. For example, not only consider the relations $x^2 + y^2 = z^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ and use them separately, but also figure out their relationship.

Remainder matrix theory uses the notion of natural zero

$$0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n).$$

Limits the segment of the numerical axis to the length kn , where $k \leq n$ is any natural number, and studies the numbers that are formed on the segment kn using all possible combinations of numbers, which on the numerical segment $[1, n]$ are called simple. Therefore, the theory of residual matrices does not leave white spots on the number axis and gradually reveals them.

Chapter 13

Power residual matrices

Definition 13.1 *A remainder matrix is called a power matrix if the number of its columns is equal to an integer power of a natural number.*

The general view of the power matrix is denoted by

$$M_{m,n^k}(n), \quad m = \pi(n^{k-1}),$$

where $k > 1$ is a natural number.

First, consider the matrix $M_{m,n^p}(n)$, $m = \pi(n^{p-1})$, and $2 < p$ is a prime number. For any parity of the number n , the matrix $M_{m,n^p}(n)$ has a middle column, because its extreme columns correspond to numbers of the same parity.

Theorem 13.1 *The middle column of the matrix $M_{m,n^p}(n)$, where $m = \pi(n^{p-1})$, contains zero residuals not only in rows that correspond to odd prime divisors of n , but also in the line corresponding to the number p .*

Proof. Since the extreme columns of the matrix $M_{m,n^p}(n)$ in the rows corresponding to odd prime divisors of the number n (if any) have zero remainders, hence, and the middle column of this matrix has these zero residuals. To make sure that the middle column of this matrix has zero remainder, in the row corresponding to the number p , add n columns to the two sides of the matrix $M_{m,n^p}(n)$. We get the matrix $M_{m,n^p+2n}(0_n)$. Since $p|0_n$, then $p|\lambda^*$, where the number λ^* corresponds to the middle column of the matrix $M_{m,n^p+2n}(0_n)$. But λ^* also corresponds to the middle column of the matrix $M_{m,n^p+2(n-n_1)}(n_1)$, where $1 \leq n_1 \leq p$. Therefore, $p|\lambda^*$. Theorem 13.1 is proved.

Corollary 13.1 *The middle column of the matrix $M_{m,n^p+kn}(0_n)$, where $2 < p \leq n$ is a prime number, in the row corresponding number p , contains zero remainder if $1 \leq k \leq n$.*

Proof follows from the proof of Theorem 5.1, because the middle column of the matrix $M_{m,n^p+kp}(0_n)$, where $m = \pi(n^{p-1})$, relative to the middle column of the matrix $M_{m,n^p+p(k-1)}(0_n)$ is moved on the numerical axis by the distance p , which is determined columns.

Corollary 13.2 *The middle column of the matrix $M_{m,n^p}(1)$, where $2 \nmid n$, $2 < p$ is a prime number, $m = \pi(n^{p-1})$, contains zero remainders in the string p and in the string p_i , where $p_i|n$, $p_i > 2$.*

Proof. Suppose that λ^* is the middle column of the matrix $M_{m,n^p}(1)$, where $m = \pi(n^{p-1})$, $2 < p$ is a prime number $2 \nmid n$. Note that for $2 \nmid \lambda$ the number of even numbers between the numbers $1, 2, \dots, \lambda^*$ is one less than the number of even numbers between the numbers $\lambda^* + 1, \lambda^* + 2, \dots, 2\lambda^*$. To both sides of the matrix $M_{m,n^p}(1)$ add one column each, which correspond to the numbers 0_n and $n^p + 1$, where $2 \nmid n$, as a result we get the matrix $M_{m,n^p+2}(0_n)$. Since $p|0_n$. Therefore, $p|n^p + 1$, because $n^p + 1 = 2\lambda^*$ and λ^* is the middle column of the matrix $M_{m,n^p-2p}(1)$... In addition, λ^* is also the middle column of the matrix $M_{m,n^p+2n}(2p+1)$. Therefore, $p_i|\lambda^*$ if $p_i|n$, where $p_i > 2$ - simple odd divisors of the number n , if any.

Corollary 13.3 *The middle column of the matrix $M_{m,2n-1}(1)$, $m = \pi(n)$, is equidistant from its extreme columns, and the sum of zero and nonzero remainders in it is $\pi(n)$.*

Proof. Since the extreme columns of the matrix $M_{m,2n-1}(1)$ correspond to odd numbers, therefore it has a middle column that corresponds to the number n . The middle column of the matrix $M_{m,2n-1}(1)$ is denoted by n_s . Then the number of all the remainders of the column n_s is

$$\nu_m^*(n) + L_m^*(n) = \pi(n),$$

where $\nu_m^*(n)$ is the number of different prime divisors of the number n , each of which is less than or equal to n , and $L_m^*(n)$ is the number of nonzero remainders of the middle column n_s , each less than n .

Since n_s is not only the middle column of the matrix $M_{m,2n-1}(1)$, but also the middle column of the matrix $M_{m,2n+2}(0_n)$ because it is made up of the numbers $0_n, 0_n + 1, \dots, 0_n + 2n$. Therefore, the range (determined by the number of columns) of the middle column n from 0_n and from $2n$ are equal to each other. and are equal to n line segments of unit length.

Theorem 13.2 *If the middle column of the matrix $M_{m,n^p}(n)$, where $m = \pi(p)$, p is a prime number, contains zero remainder in the row p , then the extreme columns of the matrix $M_{m,2kp+1}(kp)$ also have zero remainders in the string p , here k is a natural number. And vice versa, if the outermost columns of the matrix have common zero residuals, then the middle column also has these residuals.*

Proof. Consider the matrix $M_{m,2kp+1}(kp)$, where $m = \pi(p)$, and $k > p$ is a natural number. It is made up of numbers

$$(k-1)p, (k-1)p+1, \dots, kp, kp+1, \dots, (k+1)p.$$

It is clear that the middle column of this matrix, which corresponds to the number kp , and the extreme columns, which correspond to the numbers $(k-1)p$ and $(k+1)p$, have zero remainders in the row p . It is easy to see that the matrix composed of numbers

$$(k-k_1)p, (k-k_1)p+1, \dots, kp, kp+1, \dots, (k+k_1)p,$$

has zero residuals in the middle and end columns in the row p , where $k \geq p$, and $k_1 \leq p$ is an arbitrary prime.

Considering a matrix made up of numbers

$$0_n, 0_n + 1, \dots, p^2, \dots, 2p^2,$$

where $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, and expanding it, i.e. increasing the width m of this matrix so that it becomes m_* , where $m_* = \pi(2p^p)$, we get matrix $M_{m_*, 0_n+2}(2)$. Note that if $0_n = \prod_{i=1}^{m_*} p_i$, where $m_* = \pi(2p^p)$, then the middle column of this matrix, which consists of numbers

$$0_n, 0_n + 1, \dots, p^p, \dots, 2p^p,$$

has zero remainder in the string p . The outermost columns of this matrix also have zero residuals in the row p . Because $p|0_n$, $p|2p^p$. Since $p|p^p$, therefore, $p|n^p - n$, $p|2n$, $p|p$, $p|np + p$ and back. Theorem 13.2 is proved.

Corollary 13.4 *If $x - y$ is a multiple of p and $p > 2$, then $x^p - y^p$ is a multiple of p^2 .*

The proof is trivial, since if $x - y$ is a multiple of p , where $p > 2$ is prime and x, y are natural numbers, then this means that $x \gg y$, $x \gg p$. Therefore, $x = kp + y$, where k is also a natural number. Thus, we get that $(kp + y)^p - y^p$ is a multiple of p^2 .

Remark. This Corollary implies Fermat's little theorem, because it reduces to $x^p - x$ multiples of xp , where xp means that on the number axis on the segment $[1, x^p]$ there are p numbers that are divisible only by x . These are numbers $x, x^2, \dots, x^p$. Also on this segment there are $p - 1$ numbers that are multiples of only px . These are numbers $xp, (xp)^2, \dots, (xp)^{p-1}$.

From Theorem 13.2 one can obtain Wilson's theorem: $(p - 1)! + 1$ is a multiple of p and $0! = 1$.

Thus, restricting the numerical segment $[0_n, 2n]$, we reduce it to the segment $[-n, +n]$. The numbers we call naturals become residuals when large numbers are divided by small numbers. For example, $2p : 2 = p$, considering that p is simultaneously the remainder of the division $p^2 : p$, $p^p : p$. Because among the numbers $1, 2, \dots, p^p$ there are p numbers, each of which is a multiple of only p , i.e. they are of the form p^k .

These are the numbers $p, p^2, \dots, p^p$.

Fermat's little theorem and Wilson's theorem show that the method of mathematical induction and the sieve method are the main methods for studying numerical relations on the number axis. And in Matrix mathematics, these methods are combined.

Chapter 14

Focuses and focal lengths in residual matrices

14.1 Introduction

In the residual matrices, each column is characterized not only by zero residuals, but also by nonzero ones. In Corollary 13.3 the formula was obtained

$$L_m^*(j) + \nu_m^*(j) = \pi(n), \quad L_m^*(1) = \pi(n) = m.$$

Here j is the ordinal number of the column.

The question arises, in relation to which column is the column number j determined? After all, the residual matrix has two extreme columns, so the role of adjacent matrices becomes decisive.

Consider the adjacent matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\lambda + 1)$, where $\pi(n) = m$. Since these matrices differ only in the columns that correspond to the numbers λ and $\lambda + n$, and the rest of the columns they have in common, therefore, when combined, they form a new matrix, which is composed of the numbers $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n$. It is clear that for $2|n$ the new matrix has a middle column, which can be denoted λ^* . The number corresponding to λ^* is called the focus, and the numbers λ and $\lambda + n$ are called side focuses of the new matrix.

Each of the numbers λ, λ^* and $\lambda + n$ is characterized by zero and non-zero residuals, which are less than or equal to n in absolute value. Therefore, it becomes interesting to determine not only their number, but also their distance from the middle column and from the beginning of the number axis.

14.2 Focal distances in residual matrices

The general view of matrices with a middle column is denoted by $M_{m,2n-1}(1)$, where $m = \pi(n)$. The middle column of this matrix corresponds to the number n , and the extreme columns to the numbers 1 and $2n - 1$. Therefore, the number n is the focus, and 1 and $2n - 1$ are side focuses of this matrix.

If the focal lengths of the matrix show the number of columns (integer points on a numerical segment), then the focal lengths show the number of segments of unit length (scales of the numerical axis) that are densely spaced between these columns (points). Therefore, focal lengths are always 1 less than the number of points on a given numerical segment, with the help of which this matrix is composed.

If we consider matrices $M_{m,2n-1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, $2|\lambda$, then we have to determine the focal lengths not only in relation to the foci, but and with respect to the origin.

Theorem 14.1 *Any square matrix that has a middle column has focuses and focal lengths.*

Proof. Consider a square matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$. It has a middle column that corresponds to a prime number (Theorem 11.2), this column will be called the main focus of this matrix.

Because

$$M_{m,p^2}(1) = M_{m,2p-1}(1) + M_{m,2p-1}(2p) + M_{m,2p-1}(4p) + \dots + M_{m,2p-1}(\lambda),$$

where $\lambda = p(p-2)$.

Then the number p^2 is a focus, and the numbers $p(p-1)$ and $p(p+1)$ are side focuses of the matrix $M_{m,2n-1}(\lambda)$. On the other hand, if we consider a matrix composed of numbers

$$k, k+1, \dots, \lambda^*, \lambda^*+1, \dots, 2\lambda^*-k, \quad (14.1)$$

then the matrices that appear in the formula (14.1) in relation to the middle column also have foci and focal lengths. And if the middle column is called the main focus, then p and p^2 are the focuses of the shifted matrices $M_{m,2p}(1)$ and $M_{m,2p}((p-1)^2+1)$, which are moved equal distances relative to the middle column.

Corollary 14.1 *If $\nu(n) = 1$, then the number n is the middle column of some square matrix.*

Proof. By the condition of the Corollary, we have either $n = p_k$ is a prime number, or $n = 2^k$.

- 1) For $n = p_k$ - prime number p_k corresponds to the middle column of the matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$, because the middle column of the matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$, $p > 2$ corresponds to a prime number p_k . This follows from Theorem 11.2.
- 2) For $n = 2^k$, because $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$, therefore, 2^k correspond to the middle column of the matrix $M_{m,0_n+2}(0_n)$.

Chapter 15

Twin prime problems

If the difference between two primes is $|2|$, then they are called simple twins. For example 3 and 5 or 7 and 5. Since the time of Archimedes, there has been an assumption that the number of simple twins is innumerable, but it has not yet been proven. The existence of coprime numbers $-1, +1$ suggests that the problem of prime twins is a consequence of the basic axiom of the number axis, which says that the number 0 (zero) is a multiple of all integers. It remains to prove this corollary. Strictly speaking, it is necessary to prove a more general consequence.

$$p_{m+1} - p_m = 2^r a,$$

where a and r is a natural number, $2 \nmid a$.

It is clear that for $r = a = 1$ we get the twin prime problem.

Theorem 15.1 *If the functions $f^*(2n)$ and $f^*(2n^2)$ show the number of simple twins $< 2n$ and $< 2n^2$, then the inequality*

$$f^*(2n^2) - f^*(2n) \geq f^*(2n).$$

Proof. Consider the remainder matrix $M_{m,2n^2}(1)$, where $m = \pi(2n)$. Let's expand it, i.e. each number corresponding to each column of this matrix is further divided by the square of a prime number P_q^2 , where $2 < P_q < [\sqrt{2n^2}]$. We write the resulting residuals into the corresponding columns of this matrix.

We cross out all those columns of this matrix, each of which contains at least two zero residues in the rows $1 < i_* \leq i + i^*$, where

$$1 \leq i = m = \pi(2n), i^* = m^* = \pi(P_q), 2 < P_q \leq [\sqrt{2n^2}], m_* = m + m^*$$

.

Paying attention to the columns of the matrix $M_{m_*,n^2}(1)$, which correspond to the numbers $1, 2, 3, \dots, n^2$, we note that among them the number of uncrossed columns is

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n^2].$$

Because the column that corresponds to the number 1 is also not crossed out.

Consider the columns of the matrix $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$, which correspond to the numbers $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, 2n^2$. Among them, the uncrossed columns correspond to the numbers P_k , where $n^2 < P_k < 2n^2$, and to the number 2^r , where $n^2 < 2^r \leq 2n^2$.

If their number is denoted by k_2^* , then

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + \pi(n) + 1.$$

That's why

$$[\log_2 2n^2] - [\log_2 n] \geq [\log_2 n] + 1.$$

Since the matrix $M_{m^*, 2n^2-1}(1)$ can be represented as

$$M_{m^*, 2n^2-1}(1) = M_{m^*, 2n}(1) + M_{m^*, 2n}(2n+1) + M_{m^*, 2n}(4n+1) + \dots + M_{m^*, 2n}(2n^2-2n-1).$$

Therefore, any of the matrices $M_{m^*, 2n}(\lambda)$, where $n > 10$, $\lambda \geq 2n$, $(\lambda, n) = \nu(n)$, with strikethrough and uncrossed columns, comparing with the matrix $M_{m, 2n}(1)$ note that in total they have at least $[\log_2 n]$ uncrossed paired columns that make up the twin primes... This is because the matrix $M_{m^*, 2n^2-1}(1)$ has a middle column corresponding to the number $\lambda^* = n^2$, and uncrossed columns (including those that make up simple twins) for any parity n with respect to the column (numbers) n^2 are arranged symmetrically. That's why

$$f^*(2n^2) - f^*(2n) \geq f^*(2n),$$

those. the twin primes are innumerable.

Theorem 15.2 *If $2^p - 1$, where p is a prime number, not a multiple of 5, then it is a prime number.*

Proof. If p is a prime number, then the number $2^p + 1$ is a multiple of 3. Therefore, the number $2^p - 2$ is a multiple of 3. It follows that one of the numbers $2^p - 2, 2^p + 1$ is a multiple of 5. But walking from the point (number) $0_n = \prod_{i=1}^m$, $m = \pi(n)$ with step length 2, i.e. step is equal to two segments of unit length, if after a certain number of steps we step on the point (number) $2^p - 2$ and it turns out that $2^p - 2$ is not a multiple of 5, this means that the numbers $2^p - 4$ and $2^p + 1 = 2^p - 2 + 3$ is a multiple of 5, and $2^p - 1$ is prime. Because even and odd numbers can be reduced to the same dimension. The difference between the nearest even and odd numbers is 2. That is, both even and odd numbers can be reduced to the sum of a certain number of twos (starting from the 0_n column, or from the 1 column).

From Theorem 6.3 we know that if p is a Mersenn prime (M_p), then $2^p - 1 = q$ is also a prime. This confirms Theorem 15.2.

Note. Theorem 15.2 proves that the process of multiplication (division) on the number axis is not always a short addition (subtraction), as it is commonly believed. Because the results of these operations are relative, i.e. are defined in relation to different points, but in the same direction.

Theorem 15.3 *There is at least one Mersenn prime between two consecutive Fermat primes (F_p).*

Proof. Theorems 6.3 and 6.4 state that

$$F_{p_1} = 2^2 + 1 = 5, F_{p_2} = (2^2)^2 + 1 = 17, F_{p_3} = ((2^2)^2)^2 + 1 = 257, \dots$$

$$M_{p_1} = 2^2 - 1 = 3, M_{p_2} = 2^3 - 1 = 7, M_{p_1} = 2^7 - 1 = 127, \dots$$

Therefore, given that the smallest Mersenne number is 3, and the smallest Fermat prime is 5 (1 is not considered a prime), we get

$$F_{p_m} < M_{p_{m+1}} < F_{p_{m+1}}.$$

Since the Mersenne primes (M_p) can also be obtained from the series $M_p = 2^5 - 1 = 31$, and they are also located on the positive section of the numerical axis. Therefore, it is possible that more than one Mersenne prime fell between two consecutive Fermat primes, such as for the numbers

$$17 < 31 < 127 < 257.$$

Such a set of Fermat (F_p) and Mersenn (M_p) primes is not excluded, because they also depend on the direction of their calculation and the theorem is proved.

Corollary 15.1 *If $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(2^n)$ and $\nu(2n) = 1$, then the numbers $0_n + 1$ and $0_n - 1$ are twin primes.*

Proof. From Theorem 15.3 we know that $0_n + 1$ is a Fermat prime if $2^{2n} + 1$ is prime. By theorem 15.2 the number $2^p - 1$ is a Mersenn prime number if p is a Mersenne prime. Therefore, everything depends on $\nu(n)$, i.e. we have

$$7 = 6 + 1 = 5 + 2, 13 = 12 + 1 = 11 + 2, 19 = 18 + 1 = 17 + 2, \dots$$

We will see the same picture on the number segments $[1, 2, 3, \dots, 2^n + 1]$ and $[2^{2n} - 2^n - 1, 2^{2n} - 2^n, 2^{2n} - 2^n + 1, \dots, 2^{2n} + 1]$ if $\nu(2n) = 1$ and $2^n + 1 = F_{p_{m-1}}$, $2^{4n} + 1 = F_{p_{m+1}}$ are Fermat primes F_p .

Theorem 15.4 *If $\pi_1(x)$ shows the number of primes like $4x - 1$ and $\pi_2(x)$ shows the number of primes like $4x + 1$, then*

$$\pi_1(2p^2) - \pi_2(2p^2) = [\log_2 p].$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*, 2p^2}(1)$, where $m_* = m + m^*$, $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(2p)$ which we represent in the form

$$M_{m_*, 2p^2}(1) = N_{m_*, p^2}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, p^2}(2|2).$$

Let's cross out all those columns of these matrices in each of which there are at least 2 zero remainders in the rows $1 < i \leq m$, $1 < i^* \leq \pi(2p)$.

1. The matrix $N_{m_*, p^2}(2 \uparrow 1)$ contains the number of uncrossed columns

$$k_1^* = \pi(2p^2),$$

and the crossed out $k_1 = p^2 - k_1^*$ (the column corresponding to the number 1 is also uncrossed).

2. $N_{m_*, p^2}(2|2)$ contains the number of uncrossed columns

$$k^* = 2\pi(p^2) + 2[\log_2 p],$$

and the crossed out $k_2 = p^2 - k_2^*$.

Arranging the matrices $N_{m_*, p^2}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*, p^2}(2|2)$ with crossed out columns so that on one side there are uncrossed columns and then crossed out and comparing the matrices in such an arrangement of columns, we obtain the theorem since the matrices have the same number of columns. Therefore, the number of crossed out columns that are multiples of 5 is $[\log_2 p]$ more than those columns that are multiples of 3. Therefore, the difference between primes like $4x - 1$ becomes $[\log_2 p]$ more than the number of primes of the form $4x + 1$, i.e.

$$\pi(2p^2) - \pi(p^2) = \pi(p^2) + [\log_2 p].$$

and the theorem is beyond doubt.

Corollary 15.2 *The following relation holds*

$$f^*(2p^2) - f^*(2p) \geq f^*(2p).$$

Proof. By the theory of remainder matrices, we have

$$L_m(2p^2) - \nu(2p^2) = \pi(p^2),$$

hence

$$L_m(2p^2) \pm 1 = \nu(O_n \pm 1)$$

which proves the corollary 15.2, because the number of primes (columns) depends on the direction of the calculation. If we calculate them starting from the number 0_n to the right, then the numbers $\pi(p)$ are considered prime, and the numbers $[\log_2 p]$ are composite, and if we calculate them starting from the number $2p^2$ to the left, then the numbers $\pi(p)$ become the remainders of dividing some primes by the primes p_i , where $2 \leq p_i \leq p$, and the numbers $[\log_2 p]$ become new primes. This is explained by the formulas

$$L_m(0_n) + \nu(p) = \pi(p), \quad L_m(1) + \nu(p) = \pi(p), \quad 0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n).$$

Corollary 15.3 *The following relation holds*

$$\pi_1(p^p) + \pi_2(p^p) = [\log_2 p]^p.$$

The proof of the corollary follows trivially from Theorem 15.4.

Corollary 15.4 *For $1 < k \leq p$, $\pi(kp) = (k - 1)\pi^*(p) + [\log_2 p]$, $\pi(kp) = k\pi^*(p) - 1$, where $\pi^*(n)$ is the number of odd primes $\leq n$.*

Proof. Consider the matrix $M_{m_*,kp}(1)$, where $m_* = m + m^*$, $m = \pi(p)$, $m^* = \pi(\sqrt{kp})$, and represent it as

$$M_{m_*,kp}(1) = M_{m_*,p}(1) + M_{m_*,p}(p) + M_{m_*,p}(2p) + \cdots + M_{m_*,p}((k-1)p). \quad (a)$$

We cross out all those columns of these matrices in each of which there are at least 2 zero remainders in the rows $1 < i \leq m$, $1 < i^* < \pi(k) = m^*$.

In the matrix $M_{m_*,p}(1)$, which is on the right-hand side of the sum (a), there are $\pi(p) + 1$ uncrossed columns, of which only one is empty (does not have zero residues), and in others - only one zero residue.

In the remaining matrices of this sum, the uncrossed columns are empty (they do not have zero residuals), i.e. correspond to primes p_k , where $p < p_k < kp$. Since the number of these matrices is equal to $k - 1$, and each of them is similar to the matrix $M_{m_*,p}(1)$, therefore, each of them is compared with the matrix $M_{m,p}(1)$, for the maximum number of zero residuals, we get the consequence 15.4, i.e. the total number of simple columns in the matrix $M_{m_*,kp}(1)$ is expressed by the formulas

$$\pi(kp) = (k - 1)\pi^*(p) + [\log_2 p] \quad \text{or} \quad \pi(kp) = k\pi^*(p) - 1.$$

Note. The corollary 15.4 is easy to prove for the matrices $M_{m_*,n}(1)$, $M_{m_*,2n}(1)$, where $2 \nmid n$.

Chapter 16

Division of numbers on the numeric axis

In our minds, the process of division is carried out as a grouping of existing objects, regardless of which object and in what order they are selected for grouping. It turns out that numbers on the number axis can also be grouped.

In Matrix mathematics, numbers are grouped as residual matrices. As for example, if $2n$ consecutive natural numbers are given, then they are considered in matrices $M_{m,n}(\lambda_1)$ and $M_{m,n}(\lambda_2)$, where $m = \pi(n)$, $\lambda_2 = \lambda_1 + n + 1$, or $N_{m,n}(2|\lambda)$ and $N_{m,n}(2 \nmid \lambda + 1)$, $m = \pi(n)$. In either case, questions arise related to the properties of numbers in each matrix, depending on the value of λ, n and $\pi(n)$. To answer some of these questions, consider the matrices $M_{m,n^2}(1)$ and $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$, where $m = \pi(n^2)$.

Theorem 16.1 *The relation*

$$\pi(n^2) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) - \pi(n^2) \leq \pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,n^2}(1)$ and $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$, where $m = \pi(n^2)$. Let us expand these matrices, i.e. each number corresponding to each column of this matrix is further divided by the number p_q^2 , where $2 < p_q \leq [\sqrt{2n^2}]$ is a prime number. We write the resulting residuals in the corresponding column of each matrix.

When expanding matrices, their width will increase and become $m_* = m + m^*$, where $m = \pi(n^2)$, $m^* = \pi([\sqrt{2n^2}]) - 1$, $p_q \neq 2$.

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero residues in the rows $1 < i_* \leq m + m^*$.

Paying attention to matrices with crossed out columns, we note that

1) The matrix $M_{m,n^2}(1)$ has the number of uncrossed columns

$$k_1^* = \pi(n^2) + [\log_2 n^2].$$

It is taken into account here that the column corresponding to the number 1 is also uncrossed.

2) The matrix $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$ has the number of uncrossed columns

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Since among the numbers $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, \dots, 2n^2$ there is one number of the form 2^r .

Arranging the columns of matrices according to the maximum sample of zero residuals so that crossed out columns are located on one side, and then uncrossed ones, and taking

into account that the number of columns in the matrices are equal, comparing the matrices in such an arrangement of columns, we obtain the ratio

$$\pi(n^2) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) - \pi(n^2) \leq \pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

The theorem is proved.

Theorem 16.2 *If $a + b$, where $a > 0, b > 0, 2 < p$ is a prime multiple of p , then $a^p + b^p$ is a multiple of p^2 .*

Proof. Since for $a = b$ the theorem is true, therefore, for $a \neq b$, due to the symmetry of $a + b$, we can take $a \gg b, a \gg p$. But then $a = \alpha p - b$, where α is also an integer. That is, when a is divided by p , the remainder is $|b|$. Otherwise, we cannot accept that the number 0 (zero) is a multiple of a, p and b . Hence,

$$(p\alpha - b)^p + b^p = (p\alpha)^p - p(p\alpha)^{p-1}b + \dots + p(p\alpha) \cdot b^{p-1} - b^p + b^p.$$

The theorem is proved.

Note. The proof of Theorem 8.2 is trivially obtained from the properties of the remainder matrices.

Theorem 16.3 *The middle column of the matrix $M_{m, \lambda^p}(1)$, where $m = \pi(\lambda^{p-1})$, $2 \nmid \lambda$, contains zero remainder in the string corresponding to the prime number $p > 2$.*

Proof. First, note that the line corresponding to the number p is the line where all the remainders that appear when dividing the numbers $1, 2, \dots, \lambda^p$ by the number p are placed. Since $\lambda^p - \lambda = \lambda(\lambda^{p-1} - 1)$ is a multiple of p and λ . Therefore, if the middle column of the matrix $M_{m, \lambda^p}(1)$ is denoted by λ^* , then λ^* will also be the middle column of the matrix $M_{m, 0_n+2}(0_n)$. Since $p|0_n$, then $p|2\lambda^*$, it follows that $p|\lambda^*$ if $p > 2$. Theorem 16.3 is proved.

Corollary 16.1 *The equation $x^p + y^p = z^p$ for $(x, y) = 1, (x, z) = 1, (y, z) = 1$ for $p > 2$ has no solutions in whole numbers.*

Proof. Suppose that the matrices $M_{m, x^p}(1), M_{m, y^p}(1)$ are given, where $2 \nmid x, 2 \nmid y, (x, y) = 1$. If x^*, y^* correspond to the mean columns of these matrices, then by Theorem 16.3 we have $2p|2x^*, 2p|2y^*$, because x^* also corresponds to the mean column of the matrix $M_{m, (2x)^2}(2x+1)$. Here $0_n = 0_x = \prod_{i=1}^m p_i$. Since the equation $x^p + y^p = z^p$ is symmetric with respect to the unknowns x, y , we can also get that $2|2z^*$, where z^* is the mean column of matrix $M_{m, z^p+2}(2)$. It is clear that for $p > 2$ we obtain $(x, y, z) = p$, and the equation $x^p + y^p = z^p$ for $(x, y) = 1, (x, z) = 1, (y, z) = 1$ can have an integer solution only if $p = 2$.

Chapter 17

The $\pi(n)$ Function and the Cryptographic Problem

As you know, the function $\pi(n)$ shows the number of primes not exceeding the number n , and $\nu(n)$ is the number of different prime divisors of the number n . Since the days of Archimedes, they have been looking for ways to more easily define $\pi(n)$ and $\nu(n)$. But these methods become helpless when $n \rightarrow \infty$. In the modern development of theoretical and applied mathematics, the functions $\pi(n)$ and $\nu(n)$ are of decisive importance. Therefore, any field of science cannot do without electronic computers. In this article, my goal is not to give facts confirming what has been said, but to facilitate the process of determining the values of $\pi(n)$ and $\nu(n)$ with the help of residual matrices, which is an important problem of cryptography.

Theorem 17.1 *The relation*

$$(\pi(p))^2 - [\log_2 p] - 1 \leq \pi(p^2) \leq (\pi(p))^2 + [\log_2 p] + 1. \quad (17.1)$$

Proof. Consider a square matrix $M_{m,p^2}(1)$, $m = \pi(p)$, it has a middle column denoted by λ^* , earlier we proved that λ^* matches a prime number. Expanding this matrix, we got the ratio

$$\pi((p+1)^2) - [\log_2 p] - 1 \leq \pi(p^2) \leq \pi((p-1)^2) + [\log_2 p] + 1. \quad (17.2)$$

This is a consequence of Theorem 12.3.

The question arises, how can you strengthen the formula (17.2)? After all, the matrix $M_{m,p^2}(1)$ can be represented as

$$M_{m,p^2}(1) = M_{m*,2p}(1) + M_{m*,2p}(2p+1) + \dots + M_{m*,2p}((p-1)^2+1), \quad (17.3)$$

and also in the form

$$M_{m,p^2}(1) = M_{m*,\lambda}(1) + M_{m*,\lambda}(\lambda+1), \quad (17.4)$$

and in the form

$$M_{m,p^2}(1) = N_{m*,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m*,\lambda}(2|2) \quad (17.5)$$

Here $\lambda = \left\lfloor \frac{p^2}{2} \right\rfloor$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi(\lambda)$, $m^* = \pi(\sqrt{2\lambda})$, $p_q \neq 2$. And also in the form

$$M_{m,p^2}(1) = M_{m*,p}(1) + M_{m*,p}(p+1) + \dots + M_{m*,p}((p-1)^2-1). \quad (17.6)$$

The equality (17.6) can be symbolically represented as

$$M_{m,p^2}(1) = (M_{m,p-1}(1))^2 \quad (17.7)$$

The value p^2 shows the number of all natural numbers on the numerical segment $[1, p^2]$.

Consider the matrices $M_{m,\lambda}(1)$ and $M_{m,\lambda}(\lambda + 1)$, where $\lambda = \left\lfloor \frac{p^2}{2} \right\rfloor$, $m = \pi(\lambda)$. Let's expand them, i.e. each number corresponding to each column of this matrix is divided by $2 < p_q \leq \lfloor \sqrt{2p^2} \rfloor$ and by $p < 2^r < 2p$. We write the resulting residuals in the given columns of each matrix.

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which contains at least two zero remainders in the rows $1 < i_* \leq i + i_*$.

1) In the matrix $M_{m*,\lambda}(1)$, the number of uncrossed columns

$$k_1^* = \pi(\lambda) + \lfloor \log_2 p \rfloor.$$

2) In the matrix $M_{m*,\lambda}(\lambda + 1)$ the number of uncrossed columns

$$k_2^* = \pi(2\lambda) - \pi(\lambda) + 1.$$

Because among the numbers $\lambda + 1, \lambda + 2, \dots, 2\lambda$ there is one number like 2^r .

Let's arrange the columns of the extended matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are crossed out columns, and then uncrossed ones. Since the number of columns of matrices is the same, comparing them in such an arrangement of columns, we obtain the ratio (17.1).

Corollary 17.1 *The following relation holds*

$$\pi((n+1)^2) - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1 \leq \pi(n^2) \leq (\pi(n-1)^2) + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1. \quad (17.8)$$

Proof. Corollary 17.1 is easy to obtain from the proof of Theorem 17.1, if we take into account that the formulas (17.1) and (17.2) can be strengthened by taking into account $\nu(n+1), \nu(n)$ and $\nu(n-1)$.

Corollary 17.2 *The relation*

$$2\lfloor \log_2 n \rfloor - 1 \leq \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) \leq 2\lfloor \log_2 n \rfloor + 1. \quad (17.9)$$

Proof. Consider the matrix $N_{m,n^2}(2|1)$ and the matrix $N_{m,n^2}(2|2)$, where $m = \pi((n-1)^2)$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which contains at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi((n-1)^2)$.

1) The matrix $N_{m,n^2}(2|1)$ has the number of uncrossed columns

$$k_1^* = \pi((n+1)^2) - \pi((n-1)^2) + 1.$$

The column corresponding to the number 1 is also open.

2) The matrix $N_{m,n^2}(2|2)$ has the number of uncrossed columns

$$k_2^* = 2\lfloor \log_2 n \rfloor.$$

Arranging the columns of matrices according to the maximum number of zero residuals so that uncrossed columns are located on one side, and then crossed out, and comparing the matrices with such an arrangement of columns, we obtain the ratio (17.9). Corollary 17.2 is proved.

Note. By this corollary, you can determine the exact number of primes in any interval of numbers on the numerical axis.

Corollary 17.3 *The following relation holds*

$$\pi(N) = (\pi(n))^2, \quad n = \lfloor \log_4 N \rfloor. \quad (17.10)$$

Proof. Since $2^{2N} = 2^N 2^N$, $\lfloor \log_4 N \rfloor = \lfloor \log_2 2N \rfloor$. Suppose that $\lfloor \log_4 N \rfloor = n$, then it is possible not only to estimate $\pi(N)$ but also $\pi(N^2)$, since

$$\pi(N) = (\pi(n))^2 + \lfloor \log_2 n \rfloor, \quad n = \lfloor \log_4 N \rfloor.$$

Theorem 17.2 *The relation*

$$\nu(N) = \nu(\nu(n_1)) + \nu(n_2) + \nu(n_3) + \nu(n_4) + \nu(n_5),$$

where

$$n_1 = \lfloor \log_2 N \rfloor; \quad n_2 = \lfloor \log_3 N \rfloor; \quad n_3 = \lfloor \log_4 N \rfloor; \quad n_4 = \lfloor \log_5 N \rfloor; \quad n_5 = \lfloor \log_7 N \rfloor.$$

Proof. Since the middle column of the matrices $M_{m,2^{2N}+2}(0_n)$ and $M_{m,2^{2N}+1}(1)$, where $m = \pi(2^N)$, $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, coincide, therefore the number $2^{2N}+2$ may contain zero residuals in the columns that correspond to the numbers $n_1 = \lfloor \log_2 N \rfloor$; $n_2 = \lfloor \log_3 N \rfloor$; $n_3 = \lfloor \log_4 N \rfloor$; $n_4 = \lfloor \log_5 N \rfloor$ and $n_5 = \lfloor \log_7 N \rfloor$. But these columns may contain repeating prime factors, and we are only interested in various prime divisors of N . Therefore, he obtains the assertion of Theorem 17.2.

Note. It is clear that with the help of the theorem 17.2 it is possible to determine all divisors of the number N .

Corollary 17.4 *If the number N is prime, then n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 correspond to simple formed numbers, i.e. numbers of the form P_i^k , $k \geq 1$, P_i is a prime number.*

Proof of the corollary follows trivially from the theorem.

Theorem 17.3 *There is a relation*

$$\lfloor \log_2 n \rfloor - 1 \leq \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) \leq \lfloor \log_2 n \rfloor + 1. \quad (17.11)$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,n^2}(1)$ and $M_{m,n^2}(2n+1)$, where $m = \pi(n^2)$. Let's expand them, i.e. divide each number that corresponds to each column of these matrices by the number p_q^2 , where p_q is a prime number such that $2 < p_q \leq \lfloor \sqrt{2n^2} \rfloor$. We enter the resulting residuals into the corresponding columns of this matrix.

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which contains at least two zero residues in the rows $1 < i \leq \pi(n^2)$.

1) The number of uncrossed columns in the matrix $M_{m,n^2}(1)$ is

$$k_1^* = 2\lfloor \log_2 n \rfloor + \pi(n^2),$$

since the column corresponding to the number 1 is also not crossed out.

2) In the matrix $M_{m,n^2}(2n+1)$, the number of uncrossed columns is

$$k_2^* \leq \pi((n+1)^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Since it is possible among the numbers $n^2+1, n^2+2, \dots, (n+1)^2$ there is one number of the form 2^r .

Considering that the matrices $M_{m,n^2}(1)$ and $M_{m,n^2}(2n+1)$ have common columns that correspond to the numbers $2n+1, 2n+2, \dots, n^2$. We can ignore them and compare the matrices $M_{m,2n}(1)$ and $M_{m,2n}(n^2+1)$ with already crossed out columns.

Arranging the columns of matrices according to the maximum number of zero residuals so that crossed out columns are located on one side, and then uncrossed ones, and taking into account that

$$\overline{M}_{m,n^2}(2n+1) - \overline{M}_{m,n^2}(1) = \overline{M}_{m,2n}(n^2+1) - \overline{M}_{m,2n}(1) = c(m, n, 2n+1).$$

Comparing the matrices with such an arrangement of columns, we obtain the relation (17.11). Otherwise, we get that the matrices do not have the same number of columns.

Theorem 17.4 *The relation*

$$2\pi(n^2) - \pi(n) \leq \pi(2n^2) \leq 2\pi(n^2) - \left\lfloor \frac{\pi(n)}{2} \right\rfloor + 1. \quad (17.12)$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,n^2}(1)$ and $M_{m,n^2}(n^2+1)$, where $m = \pi(n)$. We extend them as in Theorem 17.3. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which corresponds to a composite number.

1) The number of uncrossed columns in the matrix $M_{m,n^2}(1)$ is

$$k_1^* = \pi(n^2) + 1,$$

since the column corresponding to the number 1 is also not crossed out.

2) In the matrix $M_{m,n^2}(n^2+1)$, the number of uncrossed columns is

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2).$$

Since in each row of each matrix there are n^2 zero and nonzero remainders, and in each column of the same matrices there are $\pi(n)$ zero and nonzero remainders, therefore, in the matrix $M_{m,n^2}(1)$ out of k_1^* uncrossed columns only $\pi(n)$ columns have one zero remainder, and the rest are empty, i.e. they do not have zero residues. They are composed only of non-zero residuals. In the matrix $M_{m,n^2}(n^2+1)$, all k_2^* uncrossed columns are empty. Let's arrange the columns of matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out. Let us compare the matrices with such an arrangement of columns, we obtain the ratio (17.12).

Theorem 17.5 *The relation*

$$2(\pi(n))^2 - 2[\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n^2) \leq 2(\pi(n))^2 - [\log_2 n] + 1. \quad (17.13)$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,n^2}(1)$ and $M_{m,n^2}(n^2+1)$, where $m = \pi(n)$. Let us extend them as in Theorem 17.3. We cross out all those columns of these matrices, each of which in rows $1 < i \leq m$ has at least 2 zero residuals, $m_* = m + m^*$, $m^* = \pi(\sqrt{2n^2})$, $m = \pi(n^2)$, $1 < i \leq m^*$.

1) The number of uncrossed columns in the matrix $M_{m,n^2}(1)$ is

$$k_1^* = \pi(n^2) + 2[\log_2 n],$$

since the column that corresponds to the number 1 is composed of only their non-zero remainders. Therefore, in these k_1^* uncrossed columns, the number of nonzero remainders is

$$k_1 = k_1^* \cdot \pi(n) - k_1^* + 1 = k_1^*(\pi(n) - 1) + 1.$$

2) In the matrix $M_{m,n^2}(n^2 + 1)$, the number of uncrossed columns is

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + 1.$$

Since among the numbers $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, (n+1)^2$ there is only one number of the form 2^r . Therefore, in these k_2^* uncrossed columns, the number of nonzero remainders is

$$k_2 = k_2^* \cdot \pi(n) - 1.$$

Because in each of the matrix columns there are $\pi(n)$ zero and non-zero residuals, and in each row of each matrix there are n^2 zero and non-zero residuals.

After expanding the matrices, the following relation holds:

$$\overline{M}_{m_*,n^2}(n^2 + 1) - \overline{M}_{m_*,n^2}(1) = c_*(m_*, n, n^2 + 1).$$

Considering this ratio, we compare the matrices whose columns are located so that on one side there are uncrossed columns, and on the other, crossed out, we get the ratio (17.13).

Note. Given $\nu(2n^2)$, the value of $\pi(2n^2)$ can be determined up to 1.

Theorems 17.3 - 17.5 are also corollaries of Theorem 17.1.

But since they estimate the number of primes on different parts of the numerical axis in relation to the zero point (origin), we consider them as separate theorems.

Chapter 18

Commensurable and incommensurable segments

Simplifying the equation

$$(xn)^2 + (yn)^2 = (zn)^2, \quad (18.1)$$

where n is an arbitrary natural number, and taking $x = y = a$, $z = d$, we get

$$a^2 + a^2 = d^2, \quad (18.2)$$

where a is the side, d is the diagonal of the square.

The existing mathematics, instead of explaining the equality (18.2), is satisfied only by the declaration that the side and diagonal of a square are incommensurable segments. Thus, the problem of “magic squares” is driven into a dead end so that mathematicians hardly notice it. But in vain, because the explanation of the truth of the essence of equality (18.2) would lead to the contradictions that arise on the number axis due to the main axiom, which says that the number “ZERO” is a multiple of all integers.

Matrix mathematics treats the equality (18.2) as the sum of two similar matrices with identical sizes and turns it into an identity. Since the number of odd numbers on the segment $[1, 2n - 1]$ and even numbers on the segment $[2, 2n]$ is made up of n such segments, each of which contains two segments of unit length. Therefore, they are of equal length, but are defined (measured) with respect to different points on the number axis.

For incommensurate segments, the following relation holds:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2 + 2^2 + 4^2 + \dots + (2n)^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (2n)^2. \quad (18.3)$$

Representing even and odd numbers on different numerical axes, the origin of which is shifted relative to each other by a segment of unit length, we bring them to a single dimension. This allows you to consider odd (even) numbers as the sum of a certain number of twos. Thus, on the numerical axis, numeric operations are performed not by points, which were called numbers, but by the number of unit segments that are tightly spaced between these points (numbers). The study of numerical processes is facilitated if we consider them on different numerical axes, for which the prime numbers $\leq n$ are used as the scale. Thus, each prime number has its own axis on which this prime number sets the scale. When proving theorems using the remainder matrices, we used this method, i.e. sometimes we used $\pi(n)$ axes. From the point of view of existing mathematics in the equality (18.2) the transition from $(a, a) = a$ to $(a, d) = 1$ is inexplicable, because the true essence of equality is lost. But in matrix mathematics this becomes completely clear and explicable. The numerical “chaos” that the “main axiom” creates on the numerical axis, the matrix of residuals leads to a certain pattern.

Matrix mathematics led us to the fact that the scale of the number axis cannot become zero, and does not depend on whether it occupies a part of a straight line or a curved line. With an increase (decrease) in the number of sides of a regular polygon, in which circles are inscribed (described), it is impossible to achieve equality of their radii. In a given polygon, the radii of the circumscribed and inscribed circles form an angle of a certain value between themselves, which depends only on the side of the polygon, or, more precisely, on the scale of the numerical axis on which this side lies. Converting the equation $x^2 + y^2 = z^2$ into the equality $x^2 + y^2 = r^2$ or into the equality $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ at the same time we turn them into identities that show the distance between two points in different areas, and depend only on the scale of a given numerical axis.

It is easy to see that not only the side of the square is incommensurable with the radii of the circumscribed and inscribed circles, but also the side of an equilateral triangle. Therefore, the diameter of the circle is incommensurable with the length of the circle and the diameter of the ball is incommensurable with the plane of the surface of the ball. This led to the appearance of the irrational and transcendental number $\pi \approx 3.14$. For ellipse and ellipsoids, incommensurate segments appear as focal lengths of actual surfaces.

Matrix mathematics converts the number axis into the sum (collection) of an infinite number of commensurate and incommensurable segments, in the form of compound and simple columns (numbers), which are grouped in the residual matrices, regardless of whether they are located on a straight line or a curve.

The whole question is how to find the distribution patterns of these matrices (columns, numbers) on the number axis.

The notion of natural zero (0_n), where $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$, facilitates the solution of this question. The number 0_n forces us to recognize that the number 1 (the scale of the numerical axis) is the beginning of calculating odd numbers, and the number 2 is the beginning of calculating even numbers. By separating the even numbers from the odd ones, 0_n becomes the axis of symmetry for these numbers, which are evenly spaced on both sides of 0_n , turning the number axis into a dashed line. Thus, the number 0_n allows the numerical problems arising on large intervals of numbers to be reduced to the problems of small intervals, which are located near 0_n and, with their help, to solve the problem of large intervals. That is, define $\pi(n^2)$ using $\pi(n)$ and $[\log_2 n]$, taking into account the invariance of numerical processes (laws of number formation) on the numerical axis.

The main drawback of existing mathematics is that it forgets the original definition of the number axis and treats the number axis as a continuous line. Facing problems in all branches of mathematics, she heroically tries to solve these problems, but often fails, because, taking the number 0 as a multiple of all integers, she forgets that the number 1 (the scale of the number axis) is not a multiple of any other number.

The remainder matrix tries to harmonize these axioms with each other.

Chapter 19

Opposite and shifted remainder matrices

Definition 19.1 *Such matrices that do not have common columns are called opposite residual matrices. For example, matrices $M_{m,n}(\lambda_1)$ and $M_{m,n}(\lambda_2)$, where $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| > n$.*

Definition 19.2 *Such matrices that have common columns are called shifted remainder matrices. For example, matrices $M_{m,n}(\lambda_1)$ and $M_{m,n}(\lambda_2)$, where $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| < n$.*

Definition 19.3 *The distance between two points on the numerical axis is equal to the difference between the numbers corresponding to these points.*

Definition 19.4 *The ordinal numbers of the matrix columns are determined not only with respect to the initial column to the right, but also with respect to the origin on the given numerical axis.*

Theorem 19.1 *In the opposite matrices $M_{m,n}(\lambda_1)$ and $M_{m,n}(\lambda_2)$, where $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| > n$, there are at least $\left\lceil \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rceil - \nu(n)$ columns, each of which has no zero remainder in rows $1 < i \leq m$, if $8 < n < \lambda$.*

Proof. Consider the matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(\lambda)$, where $(n, \lambda) = \nu(n)$, $m = \pi(n)$, $8 < n < \lambda$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m$.

1) In the matrix $M_{m,n}(1)$, the number of crossed out columns is

$$k_1 = n - [\log_2 n] - 1,$$

and the number of uncrossed columns is

$$n - k_1 = [\log_2 n] + 1.$$

Because the column corresponding to the number 1 is not crossed out.

2) In the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, we denote the number of uncrossed columns by $k_2^* = \alpha_1 + \alpha_2$.

Where α_1 is the number of those uncrossed columns, each of which has only one zero remainder, and this zero remainder is in the row $i = 1$.

α_2 - the number of those uncrossed columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ that are empty, i.e. do not have zero residues.

Therefore, the number of crossed out columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ is

$$k_2 = n - k_2^* = n - (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Insofar as

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1) = c(m, n, \lambda). \quad (19.1)$$

Since $c^*(m, n, \lambda) \leq c(m, n, \lambda)$ and for $2 \nmid n, 2 \mid \lambda$ the number of even columns (corresponding to even numbers) in the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ is 1 more than the number of even columns in the matrix $M_{m,n}(1)$, then the following relation holds:

$$\overline{M}_{m,n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}^{k_1}(1) \geq c^*(m, n, \lambda) + \alpha_1 + 1. \quad (19.2)$$

Subtracting (19.2) from (19.1), we get $\alpha_1 - [\log_2 n] \leq 1 - \alpha_1$, or

$$\alpha_1 \leq \left\lceil \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rceil + \nu(n).$$

Thus, we obtain that the number of uncrossed columns of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$ is

$$k_2^* - \alpha_1 = \alpha_2 \geq \left\lceil \frac{[\log_2 n]}{2} \right\rceil - \nu(n).$$

Because perhaps the number $a = [\log_2 n]$ is odd.

Note that

1) For $\lambda \leq n^2$, we get that α_2 is the number of primes.

2) For $\lambda > n^2$ among the α_2 numbers there can be numbers of the form $p_k^r, p_c p_d$, where p_k, p_c, p_d - prime numbers greater than n .

Since in the proof of the theorem $\lambda > n$ can take arbitrary values, therefore the Theorem is true for all opposing matrices $M_{m,n}(\lambda_1)$ and $M_{m,n}(\lambda_2)$, where $m = \pi(n)$, $|\lambda_1 - \lambda_2| < n$.

Theorem 19.1 is completely proved.

Chapter 20

Double sieve

Definition 20.1 *The method of strikethrough of columns in the matrix $M_{m,2n}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, each of which has at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi(n)$ is called a double sieve.*

The double sieve allows expressing the number of primes $\pi(kn) - \pi(n)$ in terms of the functions $\pi(n)$ and $\log_2 n$, where $n \geq k$ is a natural number.

Theorem 20.1 *There is a relation*

$$\pi(4n) - \pi(2n) \geq \pi(2n) - \pi(n),$$

if $n \geq 10$.

Proof. Consider the matrix $M_{m,4n}(1)$, where $m = \pi(2n)$, $n \geq 10$. We represent this matrix in the form

$$M_{m,4n}(1) = N_{m,2n}(2 \nmid 1) + N_{m,2n}(2|2), \quad n \geq 10.$$

1) In the matrix $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$ we carry out the double sieve method, i.e. Let's cross out those columns of this matrix that correspond to composite numbers. The number of uncrossed columns in this matrix is denoted by k_1^* , we get

$$k_1^* = \pi(4n).$$

This follows from the fact that the column that corresponds to the number 1 is also uncrossed.

The number of crossed out columns in this matrix is denoted by k_1 , we get

$$k_1 = 2n - k_1^*.$$

2) In the matrix $N_{m,2n}(2|2)$ we also carry out the double sieve method, i.e. we cross out only those columns that correspond to the numbers $2p_i$, where $2 < p_i \leq 2n$. The number of uncrossed columns in this matrix is denoted k_2^* , and the number of strikethrough columns in this matrix is denoted k_2 . We get

$$k_2^* = \pi(4n) - \pi(2n) = \pi(2n) - \pi(n) \geq [\log_2 n],$$

and strikethrough

$$k_2 = 2n - k_2^*.$$

Arranging the columns of the matrices $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$ and $N_{m,2n}(2|2)$ according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out. Comparing matrices with such an arrangement of columns, we obtain a theorem. Because the number of columns of matrices $N_{m,2n}(2 \nmid 1)$ and $N_{m,2n}(2|2)$ are equal to each other. Theorem 20.1 is proved.

Note. The question arises, how to determine the number of simple columns (empty, not containing zero residues) of a matrix if its columns correspond to negative numbers? There are no negative primes in existing mathematics because the distance between the number 0 and the number 1 is not always taken into account. And we get that half of 30 is 15. But if there are 30 points on the numerical axis, then one half of these points is to the left of the point between the 15th and 16th points, and the second half is to the right of this one.

Consider the matrix $M_{m,2n}(-(n-1))$, which is composed of numbers

$$-(n-1), -(n-2), -(n-3), \dots, -1, O_n, 1, 2, \dots, n.$$

Here $m = \pi(n)$.

Among the columns of this matrix that correspond to the numbers $-(n-1), -(n-2), -(n-3), \dots, -1, O_n$ there are also columns that correspond to the numbers $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Hence, they correspond to prime numbers. After all, incommensurable segments do not depend on where they are on the number axis.

Theorem 20.2 *Any square matrix can be represented as the sum of a certain number of opposing matrices.*

Proof. Recall that a matrix is called square if the number of its columns is equal to the full square of a natural number. First, we prove the theorem for the matrices $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(n)$.

Because

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + M_{m,n}(2n+1) + \dots + M_{m,n}(n(n-1)+1) = \\ &= M_{m,2n}(1) + M_{m,2n}(2n+1) + \dots + M_{m,2n}((n-1)^2+1) = \\ &= M_{m,3n}(1) + M_{m,3n}(3n+1) + \dots + M_{m,3n}(n^2-3n+1) = \\ &\dots\dots\dots \\ &= M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda+1). \end{aligned}$$

Here $m = \pi(n)$, $\lambda = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$.

Therefore, the theorem is proved for the initial matrix $M_{m,n^2}(1)$. Similarly, the theorem can be proved for any matrix $M_{m,n^2}(\lambda)$.

Theorem 20.3 *Any square matrix can be represented as the sum of a certain number of shifted matrices.*

Proof. Since the matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(n)$, can be represented as

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,n(n-1)}(1) + M_{m,n(n-1)}(n+1), \quad (20.1)$$

or

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,kn}(1) + \dots + M_{m,kn}(kn+1), \quad (20.2)$$

where $m = \pi(n)$, $k \leq n$.

Therefore, the theorem is proved for the initial square matrix.

Similarly, we can obtain the proof of the theorem for the matrices $M_{m,n^2}(\lambda)$, where $k \leq n \leq \lambda$. Because the matrices that are on the right-hand side of the equality (20.1) are shifted remainder matrices.

Corollary 20.1 *Residual matrices with step h , i.e. $N_{m,n}(n \nmid \lambda)$ and $N_{m,n}(n \mid \lambda + 1)$ are shifted remainder matrices.*

Proof. Recall that the remainder matrices with step h are defined in Chapter 5, Section 5.4. Taking $h = 2$, we obtain the matrices $N_{m,n}(2 \nmid 1)$ and $N_{m,n}(2 \mid 2)$, which are actually shifted remainder matrices, they are relative to each other are shifted by a segment of unit length. Therefore, for any value of h these matrices will be shifted relative to each other by the amount $h - 1$.

Theorem 20.4 *The relation*

$$\pi(n^2) - \pi((n-1)^2) = [\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 2 \end{cases}. \quad (20.3)$$

Proof. Consider the initial square matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(n)$. We represent it in the form

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,(n-1)^2}(1) + M_{m,(n-1)^2}(2n+1) + M_{m,2n}(1) = \\ &= M_{m,n^2-4n}(1) + M_{m,n(n-1)}(n+1) + M_{m,2n}((n-1)^2+1), \end{aligned}$$

where $m = \pi(2n)$, $k \leq n$.

Since the matrices $M_{m,(n-1)^2}(1)$ and $M_{m,(n-1)^2}(2n+1)$ are shifted, therefore, they have common columns that correspond to numbers

$$2n+1, 2n+2, \dots, (n-1)^2.$$

Cross out all those columns of the matrix $M_{m,(n-1)^2}(1)$, each of which has at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi(2n)$. In the matrix $M_{m,(n-1)^2}(2n+1)$ cross out all those columns of the matrix that correspond to composite numbers. Paying attention to the matrices with crossed out columns, note:

- 1) In the matrix $M_{m,2n}(1)$ the number of uncrossed columns

$$k_1^* = [\log_2 n] + 2.$$

Among the numbers $n+1, n+2, \dots, 2n$ there is only one number of the form 2^r , and the column corresponding to the number 1 is also not crossed out.

- 2) In the matrix $M_{m,n^2-4n}(2n+1)$ the number of uncrossed columns

$$k_2^* = \pi((n-1)^2) - \pi(2n).$$

- 3) In the matrix $M_{m,2n}((n-1)^2+1)$ the number of uncrossed columns

$$k_3^* = \pi(n^2) - \pi((n-1)^2).$$

Since for $2 \nmid n$ the number of odd columns of the matrix $M_{m,n^2}(1)$ is 1 (one) more than the even columns of the same matrix, and taking into account that in the matrix $M_{m,2n}(1)$ primes p_i , where $2 \leq p_i < 2n$, are also crossed out, and in the matrix $M_{m,n^2-4n}(2n+1)$ on There are more $[\log_2 n] + 1$ even columns crossed out than in the matrix $M_{m,(n-1)^2}(1)$, we get the statement (20.3). Theorem 20.4 is proved.

Corollary 20.2 *The following relation holds*

$$\pi(n^2) - \pi((n-2)^2) = 2[\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 2 \end{cases}; \quad (20.4)$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,4n}(1)$ and $M_{m,4n}((n-2)^2 + 1)$, where $m = \pi(n)$. Let's cross out all those columns of these matrices in each of which there is at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi(2n)$. Comparing these matrices with crossed out columns by the maximum number of zero residuals, we obtain Corollary 20.2.

Corollary 20.3 *The matrix $M_{m,2n}(kn + 1)$, where $m = \pi(n)$, $2 < k \leq n$ is at least $[\frac{\log n}{2}] - 1$ columns, each of which has no zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi(n)$.*

Proof. Consider the matrices $M_{m,2n}(1)$ and $M_{m,2n}(kn + 1)$, where $m = \pi(n)$, $2 < k \leq m = \pi(n)$. Crossing out all those columns of these matrices in each of which there is at least one zero remainder in rows $1 < i \leq m$, and comparing matrices with crossed out columns by the maximum number of zero remainders, we obtain Corollary 20.3.

Corollary 20.4 *The following relations hold*

$$\pi(n^2) \geq 2\pi \left[\frac{n^2}{3} \right] - [\log_2 n] + \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}; \quad (20.5)$$

$$\pi(n^2) \leq 2\pi \left[\frac{n^2}{4} \right] + [\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 2 \end{cases}; \quad (20.6)$$

Proof. The matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(n)$, can be represented as

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n^2-6n}(1) + M_{m,n^2-6n}(3n+1) = \\ &= M_{m,3n}(1) + M_{m,n^2-6n}(3n+1) + M_{m,3n}(n^2-6n+1), \end{aligned}$$

where $m = \pi(3n)$. In the matrix $M_{m,n^2-6n}(1)$, cross out all those columns, each of which has at least one zero remainder in rows $1 < i \leq m = \pi(3n)$... In the matrix $M_{m,n^2-6n}(3n+1)$, cross out all the columns that correspond to composite numbers.

1. In the matrix $M_{m,3n}(1)$ the number of uncrossed columns

$$k_1^* = [\log_2 n] + 2,$$

because the column corresponding to the number 1 is not crossed out, and among the numbers $n+1, n+2, \dots, 3n$ there is only one number of the form 2^r .

2. In the matrix $M_{m,n^2-6n}(3n+1)$ the number of uncrossed columns

$$k_2^* = \pi(n^2 - 6n) - \pi(3n).$$

3. In the matrix $M_{m,3n}(n^2 - 6n + 1)$ the number of uncrossed columns

$$k_3^* \geq [\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 2 \end{cases}.$$

Therefore, comparing the number of crossed out and uncrossed columns of the matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(3n)$, we obtain the relation (20.5).

Representing the matrix $M_{m,n^2-8n}(1)$, where $m = \pi(4n)$, in the form

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n^2-8n}(1) + M_{m,n^2-8n}(4n+1) = \\ &= M_{m,4n}(1) + M_{m,n^2-8n}(4n+1) + M_{m,4n}(n^2-8n+1), \end{aligned}$$

and arguing in a similar way, we get the relation (20.6). The corollary 20.4 is proved.

Corollary 20.5 *If $2n < \lambda < n^2$, then the following relation holds:*

$$[\log_2 n] - 1 \leq \pi(\lambda + 2n) \leq \pi(n) + 1.$$

Proof of the corollary is similar to the proof of the theorem.

Theorem 20.5 *The relation*

$$\pi(n^2) = 2\pi[n^2/2] - \pi(n) + [\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, \text{ if } \nu(2n) > 2 \end{array} \right\}. \quad (20.7)$$

Proof. Consider the matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(n)$. We represent it in the form

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda+1) = N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) + M_{m,\lambda}(2|2),$$

where $m = \pi(n)$, $\lambda = [n^2/2]$.

Let's cross out all those columns of the matrix $M_{m,n^2}(1)$, each of which has at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi(n)$. Except those that correspond to prime numbers.

1. In the matrix $M_{m,\lambda}(1)$, we denote the number of uncrossed columns by k_1^* , and the number of crossed out columns we denote by k_1 . We get

$$k_1^* = \pi(\lambda) + 2[\log_2 \lambda] + 1, \quad k_1 = \lambda - k_1^*.$$

2. In the matrix $M_{m,\lambda}(\lambda+1)$ we also cross out those columns that correspond to composite numbers. Note that in this matrix the number of uncrossed columns

$$k_2^* = \pi(2\lambda) - \pi(\lambda),$$

and the number of crossed out columns

$$k_2 = \lambda - k_2^*.$$

Considering that

$$\overline{M}_{m,\lambda}(\lambda+1) - \overline{M}_{m,\lambda}(1) = c(m, n, \lambda)$$

and

$$\overline{M}_{m,\lambda}^{k_2}(\lambda+1) - \overline{M}_{m,\lambda}^{k_1}(1) \geq c(m, n, \lambda) + \pi(n),$$

and the difference between the crossed out even columns of the matrices $M_{m,\lambda}(\lambda+1)$ and $M_{m,\lambda}(1)$ is

$$[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, \text{ if } \nu(2n) > 2 \end{array} \right\},$$

where $1 \leq c(m, n, \lambda) \leq \pi(n) - \nu(n)$.

Arranging the columns of matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out. Comparing matrices with such an arrangement of columns, we note that

$$\pi(n^2) = 2\pi(n^2/2) - \pi(n) + [\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) \leq 2 \\ -1, & \text{if } \nu(2n) > 2 \end{cases}. \quad (20.8)$$

This follows from the fact that the column corresponding to the number n^2 is crossed out for any parity n , and the theorem 20.5 is completely proved.

Note. We would get the same result considering the matrices $N_{m,\lambda}(2 \nmid 1)$ and $N_{m,\lambda}(2|2)$.

Corollary 20.6 *The following relations hold*

$$2\pi(n^2) - [\log_2 n] - 1 \leq \pi(3n^2) \leq 2\pi(n^2) + [\log_2 n] + 1, \quad (20.9)$$

$$\pi(n) + 2\pi(n^2) - 1 \leq \pi(4n^2) \leq 2\pi(n^2) + 1 + \pi(n). \quad (20.10)$$

Proof. Consider the matrix $M_{m,3n^2}(1)$, where $m = \pi(n^2)$, and represent it in the form

$$M_{m,3n^2}(1) = M_{m,2n^2}(1) + M_{m,2n^2}(n^2 + 1) = N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m,\lambda}(2|2),$$

where $m = \pi(n^2)$, $\lambda = [\frac{3}{2}n^2]$.

1) In the matrix $M_{m,2n^2}(1)$, cross out all those columns, each of which has at least one zero remainder in rows $1 < i \leq m = \pi(n^2)$. The number of uncrossed columns in this matrix will be denoted by k_1^* , and the number of crossed out columns will be denoted by k_1 . We get

$$k_1^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + [\log_2(2n^2)], \quad k_1 = 2n^2 - k_1^*.$$

2) In the matrix $M_{m,2n^2}(n^2 + 1)$, cross out all those columns that correspond to composite numbers. Similarly, we obtain

$$k_2^* \leq 2\pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Considering that the matrices $M_{m,2n^2}(1)$ and $M_{m,2n^2}(n^2 + 1)$ have common columns that correspond to the numbers $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, 2n^2$, and arranging the columns of the matrices according to the maximum number of zero residuals, and comparing the matrices with such an arrangement of columns, we get

$$2\pi(n^2) + [\log_2 n] - 1 \leq \pi(3n^2) \leq 2\pi(n^2) + [\log_2 n] + 1.$$

Thus, the relation (20.9) is proved.

Now consider the matrix $M_{m,4n^2}(1)$, where $m = \pi(n^2)$, and represent it in the form

$$M_{m,4n^2}(1) = M_{m,2n^2}(1) + M_{m,2n^2}(2n^2 + 1) = N_{m,2n^2}(2 \nmid 1) + N_{m,2n^2}(2|2),$$

where $m = \pi(n^2)$.

Arguing in the same way as in the previous paragraph, we obtain the ratio (20.10). Corollary 20.6 is completely proved.

Theorem 20.6 *The following relations hold:*

$$\pi(n^2) = 2\pi[n^2/2] - \pi(2n) + \pi(n) - [\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases} \quad (20.11)$$

and

$$\pi(n^2) = 2\pi[n^2/2] - 2[\log_2 n] + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}. \quad (20.12)$$

Proof. Consider the matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(n)$, and represent it in the form

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1) = N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m,\lambda}(2 \mid 2),$$

where $\lambda = \lfloor n^2/2 \rfloor$.

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least one zero remainder in the rows $1 \leq i \leq m = \pi(n)$. Except those that correspond to prime numbers $> n$.

1. In the matrix $M_{m,(n-1)^2}(1)$, we denote the number of uncrossed columns by k_1^* , and the number of crossed out columns we denote by k_1 . We get

$$k_1^* = \pi((n-1)^2) - \pi(n), \quad k_1 = (n-1)^2 - k_1^*.$$

2. In the matrix $M_{m,(n-1)^2}(2n+1)$ the number of uncrossed columns is denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns is denoted by k_2 . We get

$$k_2^* = \pi(n^2) - \pi(2n) + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ -1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},$$

$$k_2 = (n-1)^2 - k_2^* = (n-1)^2 - \pi(2n) + \pi(n) - [\log_2 n] - 1.$$

This follows from the fact that the column corresponding to the number n^2 is crossed out for any parity n , and for $2 \nmid 1$ the number of odd columns of the matrix $M_{m,(n-1)^2}(1)$ is 1 less than the number of odd columns of the matrix $M_{m,(n-1)^2}(2n+1)$.

Considering that these matrices have common columns that correspond to the numbers $2n+1, 2n+2, \dots, (n-1)^2$, and arranging the columns of the matrices according to the maximum number of zero residuals, so that uncrossed ones are located on one side columns, and then crossed out, we get the ratio (20.11), (20.12).

Chapter 21

Column range in residual matrices

Definition 21.1 *In the residual matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, $n > 10$, the distance of two columns is determined by the number of columns that are between them.*

Definition 21.2 *Columns of the remainder matrix that have the same distance from the middle column of the given matrix are called opposite columns.*

Definition 21.3 *The distance between two columns of this matrix is 1 less than the distance of these columns.*

Theorem 21.1 *There are no numbers on the number axis that are both even and odd, or negative and positive.*

Proof. Since the even and odd numbers on the numerical axis in relation to each other are displaced by the length of the unit segment (the scale of this numerical axis), therefore, the theorem is beyond doubt.

Corollary 21.1 *On the numerical axis, as the beginning of odd numbers, there is a point, which we call number 1, and as the beginning of even numbers is number 2.*

Corollary 21.2 *The start of a number axis can become a number for another number axis, but it is only a point for a given number axis, not a number.*

Corollary 21.3 *Odd numbers that are on the positive segment of the number axis become even on the negative segment, and vice versa.*

These corollaries follow trivially from Theorem 21.1 and from the original definition of the number axis.

Theorem 21.2 *If $p > 10$ is a prime number, then the following relation holds:*

$$2\pi(2p^2) - \pi(p) - 1 \leq \pi((2p)^2) \leq 2\pi(2p^2) + 4[\log_2 p] + 1.$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*,(2p)^2}(1)$, where $p > 10$, $m_* = m + m^*$, $i_* = i + i^*$, $m = \pi(2p)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$. Since the matrix $M_{m_*,(2p)^2}(1)$ can be represented as

$$M_{m_*,(2p)^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1),$$

where $\lambda = 2p^2$.

1) In the matrix $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$, cross out all those columns, each of which corresponds to a composite number. The number of uncrossed columns in this matrix will be denoted by k_1^* , and the number of crossed out columns will be denoted by k_1 . We get

$$k_1^* = \pi(2\lambda), \quad k_1 = \lambda - \pi(2\lambda) - 1,$$

because the column corresponding to the number 1 is also not crossed out.

2) In the matrix $N_{m_*,\lambda}(2|2)$ we do not cross out only those columns that correspond to numbers of the form $2p_i$, where $2 \leq p_i < 2p^2 \dots$. The number of uncrossed columns in this matrix will be denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns will be denoted by k_2 . We get

$$k_2^* = \pi(\lambda) + 2[\log_2 p] + 1,$$

because the column corresponding to the number 2 is not crossed out.

Number of crossed out columns

$$k_2 \leq \lambda - \pi(\lambda) + 4[\log_2 p] + 1.$$

Arranging the columns of the matrices $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*,\lambda}(2|2)$ according to the maximum number of zero residuals and taking into account that these matrices have the same number of columns, we get Theorem 21.2.

Corollary 21.4 *The following relation holds*

$$2\pi(2n^2) - \pi(n) - 1 \leq \pi((2n)^2) \leq 2\pi(2n^2) + 4[\log_2 n] + 1.$$

Proof Corollary 21.4 follows trivially from the proof of Theorem 21.2.

Theorem 21.3 *The following relations hold:*

$$\begin{aligned} \pi(2^{2n}) &\geq 2(\pi(2^n) + 1)^2 - 2\pi(2^n) - 1, \\ \pi(2^{2n}) &\leq 2(\pi(2^n) + 1)^2 + \pi(2^n) + 1, \end{aligned}$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*,2^{2n}}(1)$, where the width of the matrix $m_* = m + m^*$, $i_* = i + i^*$, $m = \pi(2^n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2^{n+1}})$. Let's cross out all those columns that correspond to composite numbers.

The matrix $M_{m_*,2^{2n}}(1)$ can be represented as

$$M_{m_*,2^{2n}}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1) = N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2),$$

where

$$m_* = m + m^*, \quad m = \pi(2^n), \quad m^* = \pi(\sqrt{2^{n+1}}), \quad \lambda = 2^{2n-1}.$$

Determining the number of crossed out and uncrossed columns of the matrix $M_{m_*,2^{2n}}(1)$ and matching them with the crossed out and uncrossed columns of the matrices $M_{m_*,\lambda}(1)$ and $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$, or with strikethrough and uncrossed matrix columns $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*,\lambda}(2|2)$, we obtain the statement of Theorem 21.3. This follows from the fact that

$$\overline{M}_{m,\lambda}^{k_2}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m,\lambda}^{k_1}(1) = c(m, n, \lambda) + k_2 - k_1,$$

where k_2 is the number of crossed out columns of the matrix $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$, k_1 is the number of crossed out columns of the matrix $M_{m_*,\lambda}(1)$. Hence,

$$k_2^* = k_1^* - \pi(2^n),$$

where k_2^* is the number of uncrossed columns of the matrix $M_{m_*,\lambda}(\lambda + 1)$, k_1^* is the number of uncrossed columns of the matrix $M_{m_*,\lambda}(1)$.

Chapter 22

Numeric Axis

Mathematical operations on the number axis depend not only on the direction, but also on the place (point) where these operations occur. Because each number (point) shows the number of unit segments for which the given point (number) is distant from the beginning of the numerical axis (zero point, origin). In this sense, the zero point should not be considered a number.

The existing mathematics, neglecting this, considers the origin not only as a number, but also accepts that it is a multiple of all integers. This approach, which has moved from the mathematics of our consciousness to mathematics on the number axis, is based on the fact that the distance between the beginning of the number axis (point zero) and the number we call 1 can become zero. This leads to the fact that the distance between the number n and $n + 1$ can also become zero. But this contradicts the original definition of the number axis and does not depend on whether it is a straight or curved line. As a result, we get that the scale of the numerical axis, i.e. 1 (integer) can be divided into n (arbitrary number) equal parts.

With the use of coordinate systems, mathematicians hoped that by representing numbers not only on a line, but also on a plane and in space, it would be possible to solve the numerical problems that had accumulated before.

Various functions arose, the geometries of Lobachevsky and Riemann, positive and negative quarters, rational and irrational, real and imaginary numbers, differential and integral calculus, but the numerical problems that existed on the numerical axis, in general, were not solved, if not to say that arose new problems in the field of fractional numbers. These include the problem of the Erdos-Strauss (Erdos - Straus) and the problem of Andrzej Schinzel (Andrzej Schinzel).

The main drawback of existing mathematics is that the distance between point 0 and number 2, number -1 and number +1 is not always considered equal to two segments of unit length. This neglect leads to the fact that numbers appear on the number axis, which are both even and odd, positive and negative. Mathematics becomes one-sided $(-a)^2 = (a)^2$, and the patterns of formation of numbers on the number axis are not invariant. Considering simple arithmetic operations on the numerical axis, the following questions arise: how are numbers formed on the numerical segment $[0, 2n]$? In order to be able to answer such questions, Matrix mathematics was created, which is a generalization of the method of mathematical induction and the sieve method. It turns out that in the time of Archimedes, it was not in vain that the prime numbers were determined using the remainders.

Definition 22.1 *Similar residual matrices, in which the distance between columns having*

the same ordinal numbers, are constant and equal to each other, are called shifted residual matrices.

It follows from the definition that matrices with a step h , conjugate matrices, and adjacent matrices can become moved matrices. Such as $M_{m,n-1}(1)$ and $M_{m,n-1}(n+1)$; $N_{m,n}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m,n}(2|2)$; $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(\lambda+1)$ where $m = \pi(n)$.

Theorem 22.1 *Each square matrix can be represented as the sum of a certain number of moved matrices.*

Proof. Since the matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(n)$ can be represented as

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + M_{m,n}(2n+1) + \dots \\ &\quad + M_{m,n}(n(n-1)+1) = N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m,\lambda}(2|2), \end{aligned}$$

where

$$m = \pi(n), \lambda = [n^2/2],$$

then the theorem is proved, and it is true for any value of n_1 , if $M_{m,n^2}(n_1)$, where n_1 is an integer.

Theorem 22.2 *The relation*

$$\pi(n) + [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n) \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1. \quad (22.1)$$

Proof. Consider the matrix $M_{m,2n}(1)$, where $m = \pi(n)$. Let's expand this matrix, i.e. we divide each number corresponding to each column of this matrix by a prime number p_q^2 , where $2 < p_q \leq \pi(\sqrt{2n})$, and rewrite the resulting residuals in the corresponding column of this matrices. It is clear that the width of this matrix, which we denote by m_* , is equal to $m_* = m + m^*$, where $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n})$, $p_q \neq 2$, and strings $1 \leq i_* \leq i + i^*$.

The expanded matrix is denoted by $M_{m_*,2n}(1)$. Let's cross out all those columns of this matrix, each of which has at least 2 zero residuals. Since the matrix $M_{m_*,2n}(1)$ can be represented as

$$M_{m_*,2n}(1) = N_{m_*,n}(2 \uparrow 1) + N_{m_*,n}(2|2) = M_{m_*,n}(1) + M_{m_*,n}(n+1),$$

notice, that

1) In the matrix $M_{m_*,n}(1)$, the number of uncrossed columns

$$k_1^* \leq \pi(n) + [\log_2 n] + 1,$$

and the number of crossed out columns

$$k_1 \geq n - k_1^*,$$

because among the columns of the matrix $M_{m,n-1}(n+1)$ there is only one column that corresponds to the number 2^r , i.e. contains only one zero, which is in the line $i = 1$. And among the columns that correspond to odd numbers, there can be no more than $[\log_2 n]$ columns that are not strikethrough.

2) In the matrix $M_{m_*,n}(n+1)$, we denote the number of uncrossed columns by k_2^* , and the number of crossed out columns we denote by k_2 . We get

$$k_2 = n - k_2^* \leq \pi(n) + [\log_2 n] - 1.$$

Arranging the columns of matrices $N_{m_*,n}(2 \nmid 1)$ and $N_{m_*,n}(2|2)$ according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with this arrangement of columns, we get the relation (22.1). Theorem 22.2 is proved.

Corollary 22.1 *The following relations hold*

$$\pi(n) + [\log_2 n] - 1 \leq \pi(2n) \leq 2\pi(n) - [\log_2 n] - 1.$$

Proof of the corollary follows trivially from the proof of the theorem.

Note. These theorems (including this one and those proved earlier) suggest that primes and numbers like 2^r play almost the same role on the number axis, because $\nu(p) \neq \nu(2p)$, $L_m(p) = L(2^p)$, i.e. numbers of the form p^n , where $n \geq 2$, are simple numbers, and if a prime number $p_i > 2$, then numbers of the form p^n for $n > 2$ are odd simple numbers, and numbers like 2^n are even simple numbers.

Theorem 22.3 *The following relations hold*

$$\pi((2n)^2) \leq (\pi(n) + 1)^2 + [\log_2 n] - 1, \quad (22.2)$$

$$\pi((2n)^2) \geq (\pi(n) + 1)^2 - \pi(2n) - 1.$$

Proof. Consider the matrix $M_{m,(2n)^2}(1)$, where $m = \pi(2n^2)$, $2n^2 + 2n^2 = 4n^2 = (2n)^2 \dots$ Let's expand this matrix so that its width becomes $m_* = m + m^*$, where $m = \pi(\sqrt{(2n)^2}) = \pi(2n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n^2})$. The expanded matrix is denoted by $M_{m_*,(2n)^2}(1)$. We represent it in the form

$$M_{m_*,(2n)^2}(1) = N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m_*,\lambda}(2|2),$$

where $\lambda = 2n^2$.

1) In the matrix $N_{m_*,\lambda}(2 \nmid 1)$, cross out all those columns, each of which has at least 2 zero remainders. The number of uncrossed columns is denoted by k_1^* . We have

$$k_1^* = \pi((2n)^2),$$

because the column that corresponds to the number 1 is also not crossed out.

The number of crossed out columns in this matrix will be denoted by k_1 . We have

$$k_1 = \lambda - k_1^* = 2n^2 - \pi((2n)^2).$$

2) In the matrix $N_{m_*,\lambda}(2|2)$, cross out all those columns that are not represented in the form $2p_i$, where $4 \leq 2p_i < \lambda = 2n^2$. The number of uncrossed columns in this matrix is denoted by k_2^* , we have

$$k_2^* \geq \pi(\lambda),$$

because only the column corresponding to the number $2p_i$ is not crossed out.

The number of crossed out columns in this matrix will be denoted by k_2 . We get

$$k_2 \leq \lambda - k_2^* = \lambda - \pi(\lambda).$$

Arranging the columns of the matrices $N_{m^*,\lambda}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m^*,\lambda}(2|2)$ by the maximum number of zero residuals so that on the one hand the uncrossed columns are located, and then the crossed out ones, and comparing the matrices with such an arrangement of columns, we obtain the ratio (22.2). Theorem 22.3 is proved.

We arrive at the same answer when we represent the matrix $M_{m,(2n)^2}(1)$ in the form

$$M_{m,(2n)^2}(1) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1),$$

where $\lambda = 2n(2n - 1)$.

Corollary 22.2 *The following relation holds*

$$f^*(2n^2) - f^*(2n) \geq f^*(2n) - 1.$$

Here $f^*(x)$ is the number of simple twins among the numbers $[1, x]$, where $x \geq 10$.

Proof of the corollary follows from the fact that $2n = \lfloor \log_2 2^{2n} \rfloor$.

Theorem 22.4 *The following relations hold:*

$$\pi(2^{2n}) \geq 2(\pi(2^n) + 1)^2 - \lfloor \log_2 n \rfloor - 1, \quad (22.3)$$

$$\pi(2^{2n}) \leq 2(\pi(2^n) + 1)^2 + \lfloor \log_2 n \rfloor + 1.$$

Proof. We represent the matrix $M_{m,2^{2n}}(1)$ as

$$M_{m,2^{2n}}(1) = N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m,\lambda}(2|2),$$

where $\lambda = 2 \cdot 2^{2n-1}$.

Expanding the matrix $M_{m,2^{2n}}(1)$, we obtain the theorem if $m = \pi(2^n)$, and $m^* = \pi(\sqrt{2^{2n-1}})$.

Note. From these last two theorems, as corollaries, one can obtain all the theorems that have been proved before. I knew about the validity of these theorems for a long time, but could not prove them, i.e. explain in words. It is not in vain that they say that what cannot be explained in words cannot be proved by any theorem.

Chapter 23

Major and minor focuses of residual matrices

Definition 23.1 *The middle column of the remainder matrix is called the focus of this matrix.*

Definition 23.2 *If the middle column of the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, has no common zero remainder with the outermost columns, then this column is called the main focus, and the outermost columns are called the side focuses of this matrix.*

It follows from the definition that a matrix has a main focus and side focuses only if it has a middle column that corresponds to a number that does not have odd prime divisors $\leq n$.

Theorem 23.1 *Each prime number p_k can become the main focus of some matrix.*

Proof. Consider the matrix $M_{m,2n+1}(1)$, where $m = \pi(n)$. It is clear that if the middle column of this matrix corresponds to the number $n + 1 = p$, which has no zero remainders in the rows $1 < i \leq m$, where $m = \pi(n)$, $n + 1 = p$. Therefore, the theorem is proved. Obviously, it is also true for the matrices $M_{m,2n+1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, $n|\lambda$.

Theorem 23.2 *If a matrix has a main focus, then it has a certain number of secondary focuses.*

Proof. Since the matrix $M_{m,2p-1}(1)$, where $m = \pi(p)$, has a focus that corresponds to the number p , then from two edges of this matrix we cross out n_1 columns, where $n_1 < p - 1$. Note that the main focus of the matrix of uncrossed columns corresponds to the number p . Therefore, the outermost uncrossed columns of the new matrix cannot share zero residuals with the middle column (main focus). Theorem 23.2 is proved.

Theorem 23.3 *The square matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$, has a main focus and a certain number of side focuses.*

Proof. It is easy to see that the matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$, has a middle column, since its end columns correspond to numbers of the same parity. Let's say its middle column is λ^* . It corresponds to the prime number p_k , i.e. $p_k = \lambda^*$, where $p_k > p$. Otherwise, we find that the number 1 is composite.

For example, the matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$, can be represented as the sum

$$M_{m,p^2}(1) = M_{m,2p}(1) + M_{m,2p}(2p+1) + \dots + M_{m,2p}((p-1)^2 + 1).$$

Consequently, it consists of a main focus and a number of secondary focuses. Theorem 23.3 is proved.

Corollary 23.1 *Focuses are relative, i.e. the main focus of one matrix can become a secondary focus of another matrix, and vice versa.*

Proof of the corollary follows from the proof of Theorem 23.3.

Theorem 23.4 *If the number $p^2 + 1$ is a multiple of 5 and $p > 3$, then it is possible*

- 1) $p^2 - 2$ and $p^2 + 4$ are prime numbers, or
- 2) $p^2 - p - 1$ and $p^2 - p + 1$ are prime numbers.

Proof. Note that primes ending in 3 or 7 satisfy the condition of the theorem.

Consider a square matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$. Since $p^2 + 1$ is a multiple of 5, therefore $p^2 - 1$ is a multiple of 3. But also $p^2 - p$ is a multiple of p . We get that $p^2 + 2$ is a multiple of 3, and $p^2 + 4, p^2 - 2$ or $p^2 - p - 1$ and $p^2 - p + 1$ probably cannot be multiples of ≥ 3 and $\leq p$. Because p^2 matches the middle column of the matrix $M_{m,2p-1}(p(p-1)-1)$. Thus, Theorem 23.4 is proved.

Theorem 23.5 *If the number $p^2 - 1$ is a multiple of 5 and $p > 5$, then it is possible*

- 1) $p^2 - p - 1$ and $p^2 - p - 1 + 4$ are prime numbers, or
- 2) $p^2 + p - 1$ and $p^2 - p - 1 + 4$ are prime numbers.

Proof. Note that the theorem is satisfied by prime numbers that end with the digit 1 or 9. Since $p^2 - p$ is a multiple of p , and $p^2 - 1$ is a multiple of 30, therefore, arguing similarly to the proof of Theorem 23.4, we obtain the proof of Theorem 23.5.

Corollary 23.2 *Segment Numbers $e \mid [(p-1)^2 - 1, (p+1)^2 + 1]$ comprises at least one pair of primes twins.*

Corollary 23.3 *The numerical axis segment $[(2n-1)^2, (2n+1)^2]$ contains at least one pair of twin primes.*

Proof of corollaries 23.2 and 23.3 follows from the proof of Theorems 23.4 and 23.5, because each pair of these matrices are shifted matrices with respect to the middle column of the matrix $M_{m,p^2}(1)$, where $m = \pi(p)$.

Theorem 23.6 *One of the numbers of the form $2^{2n} - 1$ or $2^{2n} + 1$ is a multiple of 5.*

Proof. If $\nu(2n) \geq 1$, then the numbers $2^{2n} + 1$ are multiples of 5, because the number $2^{2n} - 1$ and the number $(2^p - 1)(2^p + 1)$ are multiples of $3p_i$, where $p_i > 5$. Therefore, the numbers $2^{2n} + 1$ are multiples of 5, because if we start moving from point (number) 3 with step length 2, and after a certain number of steps step on point (number) $2^{2n} + 1$, which must be a multiple of 5. Otherwise, walking in the opposite direction from the point $2^{2n} + 1$ with step length 2, if we don't get to point 5, then we won't get to point (number) 3.

For $\nu(2n) = 2$ and $n = p$, if $2^p - 1 = q$ is a Mersenn prime, then $2^q - 1 = M_p$ is also a Mersenn prime, and if $\nu(2n) = 1$ and $2^{2n} + 1 = F_p$ is a Fermat prime, then $(2^{2n})^2 + 1$ is also a Fermat prime (chapter 6, part 1 Matrix mathematics). So it all depends on the number $\nu(n)$ if $\nu(2n) = 2$ and $n = p$. For $2^{2n} - 1$ is a multiple of 5, we obtain that $2^{2n} + 1$ is not a multiple of 5. But if $2^{2n} - 1$ is not a multiple of 5, then $2^{2n} + 1$ is a multiple of 5. Because $2^p + 1$ is a multiple of 3. Theorem 23.6 is proved.

Corollary 23.4 *On each of the intervals of integers $[p^2 - 2(p+2), p^2]$ and $[p^2, p^2 + 2(p+2)]$ there is at least one pair of primes- twins.*

Proof. Consider the odd matrices $N_{m_*,p}(2 \nmid 1)$, $N_{m_*,p}(2 \nmid p^2 + 2(p+2))$ and $N_{m_*,p}(2 \nmid p^2 - 2(p+2))$, where $m_* = m + m^*$, $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(2p)$. Let's cross out all those columns of these matrices in each of which there are at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i^* \leq m^*$.

1) In the matrix $N_{m_*,p}(2 \nmid 1)$, the uncrossed columns correspond to the primes $\pi(2p)$ and the number 1, among which the numbers 3 and 5, 5 and 7 are simple twins.

2) In the matrix $N_{m_*,p}(2 \nmid p^2 + 2(p+2))$ uncrossed columns correspond to primes p_m , $p^2 < p_m \leq p^2 + 2(p+2)$.

Arranging the columns of these matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices in such an arrangement of columns, we get a consequence.

This is because if each of the primes p_m is sequentially divided by 5 or 3, then at the end we will get the remainders 4 and 2. Since the number of numbers p_m is not less than $[\log_2 p]$, then among them there will necessarily be at least one pair of p_{m+1}^* and p_m^* which, when dividing 3 and 5, will get the same remainders, i.e. $p_{m+1} - p_m = 2$, and are simple twins. This is confirmed by the formulas

$$0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n), \quad L_m(0_n) = 0, \quad L_m(1) = \pi(n), \quad \nu_m(0_n) = \pi(n), \quad \nu_m(1) = 0.$$

Similarly, one can prove the corollary for the matrix $N_{m_*,p}(2 \nmid p^2 - 2(p+2))$.

Explanation. The corollary 23.4 trivially follows from Theorem 23.6 and generalizes it somewhere, because the simple columns (corresponding to prime numbers) in the matrix $M_{m_*,2p^2-1}(1)$, the middle column of which corresponds to the number p^2 , are distributed according to a certain pattern. Therefore, not only the distribution of primes, but also the twin prime numbers are distributed symmetrically with respect to the middle column and depend not only on the direction of their calculation, but also on the type of primes, i.e. they are of the form $4x - 1$ or $4x + 1$.

Considering all the results that have been obtained before, we come to the conclusion that on the numerical axis the number shows the number of unit segments that are densely spaced between two points, of which we call one zero and the other a number. Since our math is decimal, the primes 2, 3, 5, and 7 take on a special meaning because

$$\pi(10) = \pi[\log_2 2^{10}].$$

Existing mathematics, considering 0 (zero) as the starting point, does not take into account that 0 is only a point, and not a number that excites others like themselves on the numerical axis, i.e. creates points, which are just points, not numbers. For example, the middle column of the matrix $M_{m,2n+1}(0)$, where $m = \pi(n)$ creates all the problems on the number axis and the patterns on the number axis become non-invariant.

The natural zero (0_n) is a natural number, it suggests that the beginning of odd numbers is 1 (one), and the beginning of even numbers is 2 (two), and indicates that there cannot be numbers on the number axis that are both even and odd. This approach leads to the comprehension of solutions to equations of any degree.

Let's consider the simplest of them in general terms. It is customary to say that the linear equation $ax - b = 0$, where a and b are natural numbers, has one solution. We get that $x = \frac{b}{a}$. It follows that only the value $b = 0$ or $a|b$ satisfies the equation. And what if $b \neq 0$, $a \nmid b$? Or if $b \neq 0, a = 0; a = 0, b = 0$?

Residual matrices suggest that any matrix has an axis of symmetry that becomes a point on the number axis. This point is sometimes a natural number in the form of the middle column of this matrix, and sometimes the given matrix does not have a middle column on this number axis. In order for it to have the middle column, it is necessary to change the scale of this number axis, i.e. each unit segment, which is densely spaced between two points, has to be divided into a certain number of parts and collide with commensurable and incommensurable segments, i.e. we face the problem of divisibility.

By introducing rectangular coordinates, mathematicians tried to comprehend the formation of numbers on various numerical axes that pass through the beginning of this system. The numbers on these axes received a geometric representation, the geometries of Lobachevsky and Riemann arose, but the number of problems on the number axis did not change. If you do not take into account the fact that new problems have appeared. They created a theory of complex variables, imaginary solutions to equations appeared, but almost nothing has changed. Just like when they used trigonometry on the number axis. Of course, an equation of the n -th degree has n solutions. The whole question is how many of them are real, and how many are imaginary, and how and where they are located.

Taking number 1 as the beginning of odd numbers, and number 2 as the beginning of even numbers, we get that any number on the numerical axis can be considered as the origin of numbers that are to the right or left of this number. Taking 0_n (natural zero) multiples of all primes on the numerical segment $[1, 0_n - 2]$, we get that $0_n - 1$ and $0_n + 1$ are prime numbers. Thus, an equation of any degree can be reduced to a linear equation, since

$$[\log_x x^n] = n.$$

Since the numbers N and N^2 have the same number of different prime divisors, therefore, any quadratic equation has either 2 real or 2 imaginary roots, or 1 real and 1 imaginary root. Similarly, an equation of degree 3 has either 3 real (irrational) or 3 imaginary roots, or 1 real and 2 imaginary roots, and vice versa. The question arises, what are the rational, irrational, imaginary or complex roots (solutions) of equations? How to comprehend them?

Chapter 24

The decay of the number axis. Simple matrices

Definition 24.1 *If the column of the matrix is $M_{m,n}(\lambda)$, where $n \geq 10$; $m = \pi(n)$, $n \leq \lambda \leq n^2$ has only one zero remainder, or has no zero remainder, then such a column is called a simple column of this matrix, and the number corresponding to a simple column is called a simple number.*

Definition 24.2 *Column of the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, where $10 \leq n < \lambda \leq n^2$; $m = \pi(n)$, which corresponds to a prime number, is called prime, and corresponding to a composite number, a composite column of the given matrix.*

Theorem 24.1 *In the matrix $M_{m,n}(1)$, where $n \geq 10$; $m = \pi(n)$, contains $\pi(n) + [\log_2 n]$ simple, $\pi(n)$ simple and $n - \pi(n)$ compound columns.*

The proof of the theorem is trivial, since the column corresponding to the number 1 is not considered a prime number, but the number 2 is both simple and simple at the same time.

Theorem 24.2 *The matrix $M_{m,2p}(1)$, where $p > 10$ is a prime number, contains $m = \pi(p) + [\log_2 p]$ simple and $2p - \pi(p) - [\log_2 p] - 1$ compound columns.*

Proof. The matrix $M_{m,2p}(1)$ can be represented as

$$M_{m,2p}(1) = N_{m,p}(2 \nmid 1) + N_{m,p}(2|p+1),$$

or

$$M_{m,2p}(1) = M_{m,p}(1) + M_{m,p}(p+1),$$

where $p > 10$; $m = \pi(p)$.

Striking out the columns of matrices that correspond to composite numbers, and taking into account that the number of columns of matrices are equal to each other, we get.

1) In the matrix $M_{m,p}(1)$ we denote the number of uncrossed columns by k_1^* , and the number of crossed out columns we denote by k_1 , then we have

$$k_1^* = \pi(p) + 1, \quad k_1 = p - k_1^*.$$

It is taken into account here that the column corresponding to the number 1 is not crossed out.

2) In the matrix $M_{m,p}(p+1)$ the number of uncrossed columns is denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns is denoted by k_2 , then we have

$$k_2^* \geq \pi(2p) - \pi(p) - 1, \quad k_2 = p - k_2^*.$$

This follows from the fact that among the numbers $p+1, p+2, \dots, 2p$ there is only one number of the form 2^r .

Because $\overline{M}_{m,p}(p+1) - \overline{M}_{m,p}(1) = c(m, p, p+1)$, then

$$\overline{M}_{m,p}^{k_2}(p+1) - \overline{M}_{m,p}^{k_1}(1) = c(m, p, p+1) + \pi(p) - 1.$$

or

$$\overline{M}_{m,p}^{k_2}(p+1) - \overline{M}_{m,p}^{k_2}(1) = c(m, p, p+1) - [\log_2 p] - 1.$$

Here from the matrix $M_{m,p}(p+1)$ all those columns are selected, each of which contains at least one zero remainder in the rows $1 \leq i \leq m = \pi(p)$, i.e. the same number as was crossed out in the matrix $M_{m,p}(p)$. From the last equality it follows that

$$\pi(2p) - \pi(p) \geq [\log_2 p] - 1.$$

We get the same answer when we arrange the columns of the matrices $M_{m,p}(1)$ and $M_{m,p}(p+1)$ by the maximum number of zero residuals so that on one side uncrossed columns, and then crossed out, and match the matrices with this column arrangement. Other points of Theorem 24.2 can be easily obtained in a similar way.

Corollary 24.1 *The following relation holds*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq [\log_2 n] - 1.$$

Proof of the corollary follows from the value of $\nu(2n)$.

Theorem 24.3 *If p is a prime number, then the relation*

$$\pi(4p) - \pi(2p) \geq \pi(p) + 1.$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,2p}(1)$ and $M_{m,2p}(2p+1)$, where $m = \pi(p)$. Let's cross out all those columns of these matrices that correspond to composite numbers.

1) In the matrix $M_{m,2p}(1)$ the number of uncrossed columns

$$k_1^* = \pi(2p) + 1,$$

and the number of crossed out columns

$$k_1 = 2p - k_1^* \geq 2p - \pi(p) - 1.$$

2) In the matrix $M_{m,2p}(2p+1)$ the number of uncrossed columns is denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns is denoted by k_2 , then we have

$$k_2^* = \pi(4p) - \pi(2p) - 1,$$

and the number of crossed out columns

$$k_2 = 2p - \pi(p) + 1.$$

Arranging the columns of matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with such an arrangement of columns, we obtain Theorem 24.3. This follows from the fact that the equality

$$\overline{M}_{m,2p}(2p+1) - \overline{M}_{m,2p}(1) = c(m, 2p, 2p+1).$$

Hence,

$$\overline{M}_{m,2p}^{k_2}(2p+1) - \overline{M}_{m,2p}^{k_2}(1) = c(m, 2p, 2p+1) + \pi(p) + 1.$$

Here the symbol $\overline{M}_{m,2p}^{k_2}(1)$ shows that from the matrix $M_{m,2p}(1)$ as many columns are also selected as was crossed out in matrix $M_{m,2p}(2p+1)$. Considering that among the k_2 columns selected from two matrices, those columns of the form 2^r are also selected, where r is a natural number.

Corollary 24.2 *The following relation holds*

$$\pi(n) + [\log_2 n] - \nu(n) \leq \pi(2n) \leq \pi(n) + 2[\log_2 n] + \nu(n).$$

Proof of the corollary follows trivially from the proof of the theorem. Because in each of the crossed out columns of matrices with ordinal j

$$L_m(j) = \pi(n) - \nu_m(j),$$

where $\nu_m(j)$ is the number of zero residuals in column j and $L_m(j)$ is the number of nonzero residues in the same column. But since k_1 and k_2 show the number of crossed out columns in matrices, therefore

$$|k_1 - k_2| \leq \nu(n) + \pi(n) + 2[\log_2 n].$$

Corollary 24.3 *The relation*

$$[\log_2 n] - \left\lceil \frac{\nu(2n)}{2} \right\rceil - 1 \leq \pi(n^2) - \pi((n-1)^2) \leq [\log_2 n] + \left\lceil \frac{\nu(2n)}{2} \right\rceil + 1.$$

Proof. Consider the matrices $M_{m,2n}(1)$ and $M_{m,2n}((n-1)^2 + 1)$. We cross out all those columns of these matrices that have at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi(n)$, and comparing the matrices by the maximum number of zero remainders, we come to the conclusion that the theorem is beyond doubt. Because matrices, having an equal number of columns, differ in the number of even and odd columns.

Theorem 24.4 *In the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$; $n < \lambda < n^2$ and $(n, \lambda) = \nu(n)$ there is at least*

$$\left\lceil \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rceil - 1$$

columns, each corresponding to a prime number.

Proof. Consider the matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(\lambda)$, where $n < \lambda < n^2$, $(n, \lambda) = \nu(n)$.

1) In the matrix $M_{m,n}(1)$ we cross out all those columns in each of which there is at least one zero remainder in the lines $1 < i \leq m = \pi(n)$. The number of uncrossed columns in this matrix will be denoted by k_1^* , and the number of crossed out columns will be denoted by k_1 , then we have

$$k_1^* = [\log_2 n] + 1, \quad k_1 = n - k_1^* = n - [\log_2 n] - 1.$$

2) In the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, cross out all those columns, each of which corresponds to a composite number. The number of uncrossed columns in this matrix is denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns is denoted by k_2 , then we have

$$k_2 = n - k_2^*.$$

Because

$$\overline{M}_{m,n}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}(1) = c(m, n, \lambda),$$

hence,

$$\overline{M}_{m,n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m,n}^{k_1}(1) = c_*(m, n, \lambda) + [\log_2 n] - 1.$$

This follows from the fact that among the k_1 columns there are no columns that correspond to numbers of the form 2^r , where r is a natural number ($1 \leq r \leq [\log_2 n]$), and for $n > 4$, $c_*(m, n, \lambda) > 1$.

Arranging the columns of matrices according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with such an arrangement of columns, we get Theorem 24.4. Otherwise, we get that the matrices $M_{m,n}(\lambda)$ and $M_{m,n}(1)$ have a different number of columns.

Corollary 24.4 *The number of simple columns in the matrix $M_{m,n}(\lambda)$, where $n^2 > \lambda > n$, is not less than*

$$\left\lceil \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rceil - 1.$$

Proof of the corollary is similar to the proof of the theorem.

Corollary 24.5 *In a matrix composed of numbers $-(n-1), -(n-2), \dots, -2, -1, 0_n$, and which can be written symbolically as $M_{m,n}(-(n-1))$, where $m = \pi(n)$, there is at least $\left\lceil \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rceil - 1$ columns, each of which has no zero remainder in rows $1 \leq i \leq m = \pi(n)$.*

Proof. Since by Theorem 24.4 each of the matrices $M_{m,n}(n^2)$ and $M_{m,n}(n(n-1))$ contain at least $\left\lceil \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rceil - 1$ columns, each of which corresponds to a prime number, then the consequence is beyond doubt.

Theorem 24.5 *The following relations hold:*

$$a) \pi(N) \geq (\pi(n_1))^2 - [\log_2 n_1] - 1,$$

$$b) \pi(N) \leq (\pi(n_2))^2 + [\log_2 n_2] + 1,$$

where $n_1 = [N^{1/3}]$, $n_2 = [\sqrt{N}]$.

Proof. Consider the matrix $M_{m,N}(1)$, where $m = \pi([N/2])$, extend it so that its width becomes $m_* = m + m^*$, where $m = \pi([N/2])$, $m^* = \pi([\sqrt{N}])$. The extended matrix will be denoted by $M_{m_*,N}(1)$ and represented as

$$M_{m_*,n}(1) = N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m,\lambda}(2|2) = M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda + 1),$$

where $\lambda = [N/2]$.

1) In the matrix $N_{m,\lambda}(2 \uparrow 1)$, cross out all those columns that correspond to composite numbers. The number of uncrossed columns in this matrix will be denoted by k_1^* , and the number of crossed out columns will be denoted by k_1 , then we have

$$k_1^* = \pi(N); \quad k_1 = \lambda - \pi(N).$$

2) In the matrix $N_{m,\lambda}(2|2)$, cross out all those columns, each of which does not correspond to numbers of the form $2p_k$, where $2 \leq p_k \leq \lambda$. The number of uncrossed columns in this matrix will be denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns will be denoted by k_2 , then we have

$$k_2^* = \pi(\lambda); \quad k_2 = \lambda - k_2^*.$$

Arranging the columns of the matrices $N_{m,\lambda}(2\uparrow 1)$ and $N_{m,\lambda}(2|2)$ according to the maximum number of zero residuals so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with such an arrangement of columns, we obtain item a) of Theorem 24.5.

In the matrices $M_{m,\lambda}(1)$ and $M_{m,\lambda}(\lambda+1)$, cross out all those columns that correspond to composite numbers, except for those of the form 2^r , $r > 1$. Arguing in the same way, we obtain a proof of part b) of Theorem 24.5.

Corollary 24.6 *The following relation holds*

$$\pi(4n) - \pi(3n) = \pi((4n)^{1/3}) - \pi((4n)^{1/4}).$$

Proof of the corollary follows trivially from the proof of the theorem.

Definition 24.3 *If the number of columns in the residual matrix is equal to a prime number, then such a matrix is called a simple matrix.*

In Corollary 15.4, using simple matrices $M_{m*,p}(1)$, where p is a prime number, the formulas $\pi(kp) = k\pi^*(p) - 1$ and $\pi(kp) = (k-1)\pi^*(p) + [\log_2 p]$, where $1 \leq k \leq p$, $\pi^*(n)$ - the number of odd primes. If similar formulas are obtained for the matrices $M_{m*,p^2}(1), M_{m*,p^3}(1), \dots, M_{m*,p^p}$ and for matrices $M_{m*,2^p}(1), M_{m*,2^{2p}}(1), \dots, M_{m*,\lambda}(1)$, where $\lambda = (2^p)^p$, then the cryptography problem will be completely solved.

Thus, we can say that the theory of residual matrices (matrix mathematics) reduces the number axis to decay, i.e. numerical problems that exist on large intervals of integers are solved with the help of problems that arise on small intervals of the number axis, regardless of where and on what part of the number axis these intervals are located, as well as the type of primes, i.e. these primes are like $4x-1$ or $4x+1$.

Since the number of primes depends on the direction of their calculation, i.e. they can become nonzero residuals relative to the middle column of the matrix, so the primes 2, 3 and 5 play a major role in the process of forming other primes relative to natural zero (where $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$) in one direction or the other.

The theory of residual matrices tries to find the regularities of the distribution of simple matrices and, therefore, the regularities of the distribution of simple, inter-prime and simple numbers (columns) on the number axis.

Chapter 25

Simple numbers and combinatorics

Definition 25.1 *In the residual matrix $M_{m,2n}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, a column that has only one zero remainder or has no zero residues, is called a simple column of this matrix.*

Definition 25.2 *A number of the form p_i^n , where p_i is a prime number and n is a natural number, is called a simple number.*

It follows from the definition that if $p_i \geq 3$, then p_i^n is called an odd primeval number, and if $p_i = 2$, then 2^n is called an even primeval number.

Theorem 25.1 *The main focus of any matrix is a simple number.*

Proof. Since the middle column of the matrix shows the arithmetic mean of the numbers that correspond to the extreme columns of the given matrix, for the number a such that $1 < a < p_i^n$ the following relations hold:

- 1) For $(p_i^n, a) = 1$, where a is a natural number, we obtain $(p_i^n a, p_i^n, p_i^n + a) = 1$.
- 2) For $(p_i^n, a) \neq 1$ we get $(p_i^{n_1} - a_1, p_i^n, p_i^{n_1} + a_1) = 1$. Here $a_1 < a$, $(a, a_1) = 1$ is an arbitrary natural number, $n_1 < n$ is also an arbitrary natural number.

Theorem 25.1 is proved.

Corollary 25.1 *The number of non-zero residuals in the simple columns of this matrix are either equal or differ by one.*

Proof. By the hypothesis of the corollary, it is necessary to prove that

$$|L_m(j_1) - L_m(j_2)| = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\}.$$

Here $L_m(j)$ is the number of nonzero remainders in the column numbered j .

In fact, it is easy to see that

$$|L_m(j_1) - L_m(j_2)| = \left\{ \begin{array}{c} 1 \text{ if } (j_1, j_2) = 1, \text{ if } j_1 < n_j < j_2 \\ 0 \text{ if } 2|j_1, 2|j_2, \text{ if } j_1 < n_j < j_2 \end{array} \right\}.$$

If $m = \pi(n)$.

Here n_j is the designation of the j th column.

Corollary 25.2 *If λ_a and λ_b correspond to the extreme columns of the matrix, and λ_c to its middle column, then*

$$(\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c) = 1$$

if and only if one of the numbers $\lambda_a, \lambda_b, \lambda_c$ is a simple number, and if at least one of the columns corresponding to these numbers contains at least 2 zero residues in the rows $1 < i < m = \pi(n)$, then at least one of these prime divisors also becomes a divisor of two other numbers.

Proof of the corollary follows from the definition of the focus of a matrix.

Theorem 25.2 *If the number $2^{2p} + 1$ is not a multiple of 5, then it is a prime number.*

Proof. Consider the numbers $2^{2p} - 1, 2^{2p}, 2^{2p} + 1$. The number $2^{2p} - 1$ is a multiple of 3, because the number $2^p + 1$ is a multiple of 3 and $2^p - 2$ is also a multiple of 3. But since the number 2^{2p-1} is the main focus (middle column) of matrices

$$M_{m,2^{2p}+1}(1), M_{m,2^{2p}-2}(2), M_{m,2^{2p}-4}(4),$$

because $2 \cdot 2^{2p-1} = 2^{2p}$. Therefore, if it turns out that the number $2^{2p} - 1$ is a multiple of 15, then we obtain that the number $2^{2p} + 1$ cannot be a multiple of some prime number p_k , where $5 \leq p_k < 2^{2p} - 1$. Therefore, the number $2^{2p} + 1 = p_k^*$ is a prime number. Theorem 25.2 is proved.

Note. The concept of simple columns (numbers) in remainder matrices allows us to extend combinatorial methods to the number axis, and to understand not only the meaning of the number on the number axis, but also the essence of mathematical operations (actions) with these numbers, depending on directions and segment of the numerical axis where these operations occur.

The existence of simple numbers shows that the main focuses of this number axis are points, which we call the number 1 and 2. Because simple numbers are different varieties of these numbers. Marking the beginning of the numerical axis, we actually set all those points, which we call numbers, and which are on the right or left side of this beginning.

The true essence of any number N on the number axis is determined by the ratio

$$L_m(N) + \nu(N) = \pi(n),$$

where $n = \lfloor \log_2 N \rfloor$, which determines the place of a number on the numerical axis and asserts that each number has its own definite place on the numerical axis, which cannot be confused with the place of another number. Therefore, you need to try to accurately determine not only $\pi(N)$, but also $\nu(N)$.

In existing mathematics, the value $L_m(N)$ is not often used. In the language of matrices, it means the number of nonzero remainders of the column (number) N , i.e.

$$L_m(N) = \pi(0_n) - \nu(N), \quad n = \lfloor \log_2 N \rfloor$$

shows that starting from the point 0_n (natural zero) with the step length p_i (prime number, divisor of n and N), after a certain number of steps, step on the point (number) N , while stepping on the point n . But moving from point 0_n with step length p_k , where p_k is a prime number such that $2 \leq p_k \leq \lfloor N/2 \rfloor$ and $(p_i, p_k) = 1$, we will never step on point n , even if we start moving with the same step length from point N in the opposite direction.

Taking the number 0 (zero) to be multiples of all integers, we find that the function $\pi(N)$ tends to infinity, and $\nu(N)$ tends to infinity, which add nothing significant to mathematics, except for ambiguities.

Since our math is decimal and $\pi(10) = [\log_2 10] = 3$, the primes 2,3,5 are very important, especially when the main focuses of the remainder matrices are the columns that correspond to the numbers $2^n, 3^n, 5^n$.

Ignoring the value $L_m(N)$, we arrive at the formulas

$$\nu(N) + \nu(N + 1) = \nu(N(N + 1)),$$

or

$$\nu(N) - \nu(N - 1) = \nu\left(\frac{\nu(N)}{\nu(N - 1)}\right); ?!$$

We get uncertainties that cannot figure out the process of number formation on the number axis, and therefore primitive numbers sometimes become either negative, or irrational, or imaginary, depending on what intervals of numbers they are in.

In matrix mathematics, the quantities $\pi(N)$ and $\nu(N)$ have specific values, therefore the quantities $\pi(N) + \nu(N)$ and $\pi(N) - \nu(N)$ also have specific meanings that are determined only by the scale of the given number axis. Ignoring the discontinuity of the number axis, we ourselves create additional difficulties on the number axis that become impossible to overcome.

As for combinatorics, if the sum of binomial coefficients is 2^n , therefore $2^{n-1} + 1$ corresponds not only to the middle column (main focus) of the matrix $M_{m,2^n+1}(1)$, but also the middle column of the matrix $M_{m,2^n-2}(2)$. Therefore, for $n = p$, the extreme columns of this matrix correspond to simple numbers, and in other cases, the extreme columns (side tricks) of these matrices correspond to coprime numbers. Because all composite numbers on the numerical segment $[1, 2n + 1]$ can be represented using various combinations of primes $\pi(n)$, taking into account the number 1 as the main focus of the numerical axis.

The well-known relation $C_m^{m-n} = C_m^n$, which is the basis of combinatorics, for each column numbered N_i , where $n < N_i \leq N$, for the matrix $M_{m,N}(1)$, where $m = \pi(n)$, $n = [\log_2 N]$ becomes

$$\pi(n) = L_m(n) + \nu(n).$$

This formula defines not only the function $\pi(N)$, but also $\nu(N)$. Because the matrices $M_{m,p}(1)$ and $M_{m,p}(p^p)$, where $m = \pi(p)$ are similar, and in the matrix $M_{m,p}(p^p)$ only

$$\left[\frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right] - 1$$

columns can correspond to prime numbers, i.e. have no prime divisors $< p^{p-1}$. Considering that the number of even columns of the matrix $M_{m,p}(p^p)$ is one less than the number of odd columns of the same matrix, and considering the matrices $M_{m_1,p^p}(1)$ and $M_{m_1,p^p}(p)$, where $m_1 = \pi(\sqrt{p^p})$, we can come to the conclusion that in the matrix $M_{m,p}(p^p)$ composite numbers correspond to $p - \left[\frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right] + 1$ columns, ie are composite.

Similarly, one can prove that

- 1) if the numbers $2^p - 1$ and $2^{2p} + 1$ are not multiples of 5, then they are prime numbers;
- 2) establish at what values of the number p the numbers $2^p - 1$ and $2^p + 1$ are composite;
- 3) establish which primes can be Mersen or Fermat primes, etc.

After such a parsing of the number axis, questions related to the number of solutions to equations are also clarified, they are also solved using the residual matrices.

If the number N is given on the number axis, then the goal of number theory is to define the functions $\pi(n)$ and $\nu(n)$, because $n = [\log_2 N]$. To confirm this fact, consider the matrix $M_{m,n^n}(1)$, where $m = \pi(n)$. Paying attention to the columns of this matrix numbered n and n^n , note that the n^n column has zero residuals in the same rows in which the n th column has zero residuals. This is confirmed by the fact that if the prime number p_i is a divisor of the number (column) n , then moving from the point (column) n with the step length p_i after a certain time we will step on the point (number, column) n^n and point (number, column) 0_n (natural zero). Therefore, the distance from the number 0_n (natural zero) to n^n can be reduced to the dimensions p_i and n , i.e. the number of columns in the segment from 0_n to n^n can be divided not only into p_i equal parts, but also into n equal parts. On the other hand, we can get that with the step length p_k , where $(p_k, p_i) = 1$, starting from the point n with the step length p_k , we do not we can get neither to the point n^n , nor to the point 0_n , because the number of columns of the matrix $M_{m,n}(0_n)$ is equal to $n+1$, and the natural zero is $0_n = \prod_{i=1}^m P_i$, where $m = \pi(n)$. This approach to the number axis leads us to the fact that the number of simple columns of the matrix $M_{m,n}(n^n + 1)$ can be determined using $\pi(n)$ or $[\log_2 n]$. Similarly, the number of columns that do not have zero remainders of the matrix $M_{m,n}(-0_n)$, or the matrices $M_{m,n}(-(n+1))$, which are composed of numbers $-(n+1), -n, -(n-1) \dots, -2, -1, 0_n$ can be defined using $\pi(n)$ or $[\log_2 n]$. Since the number of columns of the matrix $M_{m,n^n}(-(n+1))$ and the matrix $M_{m,n^n}(n+1)$ is also n^n . Therefore, if $n = p$ is a prime number, then the problem of defining the functions $\pi(N)$ and $\nu(N)$ reduces to defining the functions $\pi(n)$ and $\nu(n)$... The formula $\nu(N) + \nu(N+1)$, which says almost nothing about the number N , comes to life in the remainder matrices and takes the form

$$|\nu(n) - \nu(n+1)| = |L_m(n) - L_m(n+1)| = |\nu(N) - \nu(N+n)| = |L_m(N) - L_m(N+n)| \geq 0,$$

where $n = [\log_2 N]$.

It is clear that in order to solve a problem that arises in practice, it is first formulated in the form of some equation (system of equations), and then they try to solve this equation. In this sense, the solution of any equation is reduced to solving a certain numerical problem with a certain number of numbers on certain sections of the numerical axis. But if the definition of the functions $\pi(N)$ and $\nu(N)$ is reduced to the definition of the functions $\pi(n)$ and $\nu(n)$, where $n = [\log_2 N]$, therefore the definitions of the functions $\pi(n)$ and $\nu(n)$ can be reduced to the definition of simple columns of the matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$. The value $|\lambda|$ shows the distance of the number λ_1 from the number 0_n , and the distance of the number λ_2 from the number 0_n , if $\lambda_1 + \lambda_2 = N$, and $0_N = \prod_{i=1}^{m_*} p_i$, where $m_* = \pi(\sqrt{N})$, $n|N$. In this sense, if the degree of an equation is n , then the number of solutions of such an equation is equal not only to n , but also to $\nu(n+1)$. Because starting the movement from the point λ_1 with a step length of 1 (the scale of this numerical axis), after a certain number of steps, we will also step on the point (number) 0_N and on the point λ_2 .

With this approach to numerical problems that arise from equations, using the formula

$$|\nu(n) - \nu(2n+1)| = |L_m(n) - L_m(2n+1)| \geq 1,$$

one can understand the reason that the same equation can have both rational and irrational, or both real and imaginary solutions. Because not only the length of the steps, but also the number of steps and other parameters characterize the equation.

The fact is that if it is known that the number N is a multiple of p_i , then the question immediately arises: what number N_1 can be multiplied by p_i to get N ? Therefore, simple numbers on the number axis play a special role, and they find out that any equation (and system of equations) have a solution, given that both irrational and imaginary solutions are ultimately equal to the distance of a given number (more precisely, a given point) from the beginning of a given number axis, which we call the zero point, depending on where (negative or positive) this point or number is located.

Generalizing the properties of the remainder matrices, we can say that matrix mathematics does not leave blank spots on the number axis, and all problems arising from numeric operations (actions) with numbers are solved by recurrent formulas.

Chapter 26

Conclusion

Matrix mathematics, or the matrix method, tries to reconcile the mathematics on the number axis with the mathematics that is formed in our minds. This reconciliation process means to comprehend the essence of number formation on the number axis, which is associated with enormous difficulties due to the choice of the origin (the beginning of the number axis).

Since the number n on the numerical axis shows the number of unit segments densely spaced along one virtual line in two directions, therefore, the number n is not the point that we symbolically denote n , but is the sum n unit segments. This approach to numbers on the number axis leads to the relativity of the concept of parity on the number axis. Because $2n$ consecutive numbers on the number axis show that there are n even and n odd numbers among them, therefore the parity of the number, or more precisely, the **parity** of the character of the given number depends on the choice of the reference point.

There are no abstract (dimensionless) numbers on the numerical axis, each of them shows a segment, or the sum of segments that have a length, which depends on which end we measure them from, or on which part of the numerical axis these segments are located.

To be able to understand the essence of number formation on the number axis, we created residual matrices that suggest that only integers exist on this number axis, which can be composite or simple, depending on the choice of the beginning of the number axis.

Using the residual matrices, the properties of numbers can be studied not only along one straight line, but also along the vertical.

In the remainder matrix $M_{m,2n}(1)$, where $m = \pi(n)$, the numbers on the segment $[1, 2n]$ when they are alternately divided by primes p_i , where $2 \leq p_i \leq n$, turn into residuals, which are distributed over the rows p_i and over the columns q_j . Each column of such a matrix has zero and nonzero remainders, which are determined by the formulas:

for columns $L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n)$,

for lines $(\overline{N}_{m,n}(2 \nmid 1) - \overline{N}_{m,n}(2|2)) = c(m, n, 2 \nmid 1)$,

where j is the ordinal number of the j th column.

Using these formulas, we determine the value

$$\pi(2n) - \pi(n),$$

and similarly the difference

$$\pi((2n)^2) - \pi(n^2)$$

for any value of n , taking advantage of the fact that in the residual matrices we have a more complex structure of the numerical axis than we represent it. With the help of residual

matrices, the numerical axis is represented as the sum of parallel (according to Euclid's axioms) straight lines, whose origin is displaced relative to each other by a certain number of unit length segments (scale of the numerical axis). Therefore, we have

$$n = [\log_2 N], \quad n = [\log_n n^n].$$

Since our mathematics is decimal, the prime numbers 2,3,5 play a fundamental role in the process of number formation. Simple numbers appear on the numerical axis, even of which are considered potentially prime numbers, and we obtain the relativity of the concept of prime and composite numbers, depending on the origin of even and odd numbers. Using formulas:

$$n_1 = [\log_2 N], \quad n_2 = [\log_3 N], \quad n_3 = [\log_4 N], \quad n_4 = [\log_5 N],$$

we obtain the relation

$$L_m(N) = L_m(N_1) - \nu(\nu(n_1) + \nu(n_2) + \nu(n_3) + \nu(n_4)),$$

where $N_1 = [N/2]$.

Using these formulas, the quantities $L_m(N)$ and $\nu(N)$ are reduced to the quantities $L_m(n)$ and $\nu(n)$, where $n = [\log_2 N]$, and we solve not only purely theoretical, but also practical problems, reducing them to equations or systems of equations.

Generalizing the theory of remainder matrices, we obtain

Theorem 26.1 *The sum of the numbers of residuals in the matrix $M_{m,2n}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, λ is an integer, is a constant that is equal to $2n \cdot \pi(n)$.*

Proof. Since for each j th column of this matrix we have

$$L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n),$$

where $L_m(j)$ is the number of nonzero ones, and $\nu_m(j)$ is the number of zero remainders of the column numbered j , then the theorem is beyond doubt.

This theorem can be considered the main theorem of the number axis. All theorems that are proved in this collection are consequences of this theorem.

With respect to equations, we can say that the theory of residual matrices turns any equation into an identity on the number axis. Because the number formation of numbers on the number axis occurs with the same regularity, regardless of where the number formation takes place on the number axis. The regularities of number formation create elementary mathematical operations: addition (subtraction), multiplication (division), extraction of the root (logarithm). Therefore, on the number axis, it is necessary to study more deeply the process of number formation, to understand all the shades of numerical operations. For example, the equation $\sqrt{a^2} = \pm a$ should not only interest the result of $\pm a$, but also because this equality shows that:

1) Among the consecutive numbers from 1 to a^2 on the numerical axis there are only a numbers, each of which is a multiple of a .

2) The relation

$$\pi(a^2) + E(a^2) = a^2,$$

where the function $E(a^2)$ shows the number of composite numbers that are among the numbers $[1, a^2]$.

3) The relation

$$\pi(a^2) = \pi(a^*) + \pi_*(a),$$

where $\pi_*(\alpha)$ is the number of primes on the segment $[a + 1, a^2]$. Etc.

Questions arise:

1. How to express the value of $\pi(a^2)$ in terms of $\pi(a)$?
2. How to express the value of $\pi(a^2)$ in terms of $[\log_2 a]$? Etc.

Existing mathematics often neglects not only items 1), 2), 3), but also items 1. and 2.

As a result, equations of the Sierpinski-Erds type arise

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z},$$

which cannot be solved in general form, due to the fact that it is impossible to find functional dependences of the numbers x, y, z and n , and the numbers 1, 4, n .

Because when adding (subtracting) fractions, we always find a common denominator, but we never delve into the essence of this common denominator on the number axis.

In matrix mathematics, these dependencies are determined by taking the logarithm of the number N to the base n , or to the bases 2, 3, 4, 5, or using the roots $N^{1/2}, N^{1/3}, N^{1/4}, N^{1/5}$, taking into account the whole parts of the results obtained, because the formula

$$L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n)$$

is valid for the j -th column of the matrix $M_{m,2n}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, n is an integer, and $10 < n < n^2$.

Therefore, equations that cannot be solved using existing mathematics are solved using matrix mathematics.

Theorem 26.2 *For each natural number $n > 1$, there exist natural numbers x, y, z such that the following relation holds:*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \quad (26.1)$$

Proof. Simplifying the expression (26.1) and taking

$$4xyz = n(xy + xz + yz) = 4N,$$

where N is a multiple of n , we obtain the numerical segment $[1, 4N]$. Using the sieve method, i.e. leaving the prime number p_i untouched, cross out all those numbers of this segment that are multiples of p_i , where $2 \leq p_i \leq \pi(\sqrt{4N})$. It's clear that

$$[0, 4N] = [0, 2N] + [2N, 4N] + [4N, 6N] + [6N, 8N].$$

Denoting the number of composite numbers of the segment $2N_i$ through $E(2N_i)$, we obtain the relation

$$\pi(2N_i) + E(2N_i) = 2N_i,$$

and therefore

$$4N = \sum_{i=1}^4 \pi(2N_i) + \sum_{i=1}^4 E(2N_i) = \pi(4N) + E(4N). \quad (26.2)$$

The equation (26.2) contains two unknowns $\pi(2N_i)$ and $E(2N_i)$, and the number N is known (predetermined). The next equation with the same unknowns is obtained by dividing the segment $[1, 4N]$ into three parts.

$$[1, 4N] = [1, 3N] + [3N, 6N] + [6N, 9N].$$

Similarly, we obtain the equation

$$4N = \sum_{i=1}^3 \pi(2N_i^*) + \sum_{i=1}^3 E(2N_i^*) = \pi(4N) + E(4N). \quad (26.3)$$

The equation (26.3) and the equation (26.2) form a system of two equations with two unknowns, because

$$\left[\frac{\pi(4N_i)}{\pi(3N_i)} \right] = \left[\frac{E(4N_i)}{E(3N_i)} \right] = \left[\frac{\pi(3N_i)}{\pi(2N_i)} \right] = \left[\frac{E(3N_i)}{E(2N_i)} \right]. \quad (26.4)$$

Denoting

$$[\pi(3N_1^*)] = x_0, \quad [\pi(3N_2^*)] = y_0, \quad [\pi(3N_3^*)] = z_0,$$

we get a solution to the equation (26.1).

Another set of solutions is

$$[E(3N_1^*)] = x_1, \quad [E(3N_2^*)] = y_1, \quad [E(3N_3^*)] = z_1.$$

Of course, the equation (26.1) is solved in the field of existing mathematics using the sieve method. But we were led to this by the method of residual matrices, because the natural numbers on the number axis are nothing else, but the remainders that are obtained by dividing large numbers by small ones.

The equation of the form

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}, \quad (26.5)$$

or any equation of this type, because the relation (26.5) can be reduced to the system of equations

$$\begin{aligned} \pi(kn) - \pi(nk) &= x_0, & E(kn) - E(nk) &= x_1, \\ \pi(k+n) - \pi(n) &= y_0, & E(n+k) - E(n) &= y_1, \end{aligned}$$

where k, n, x, y, x_1, y_1 are natural numbers, and $1 < k \leq n$.

Matrix mathematics led us to the conclusion that Thales' theorem is not exact, because it is a consequence of the basic axiom of existing mathematics (the number "ZERO" is a multiple of all integers), which brings the results of mathematical operations to approximate values. These minor inaccuracies lead to problems not only in operations with integers, but also with fractional numbers, or, more precisely, in all branches of mathematics.

As for Thales' theorem, matrix mathematics suggests that a segment with a length of N can be divided at most into $N - 1$ equal parts. The refined Thales theorem became a decisive factor for understanding the process of number formation and the true essence of equations on the number axis.

The problem of determining the number of prime and composite numbers on the numerical segment $[\lambda, \lambda + n]$ is the main problem of number theory. Therefore, any problem

(equation) on the numerical axis can be reduced to finding the values $\pi(n)$, $\nu(n)$, $E(n)$, $[\log_2 n]$ for a given value of n and determining the dependence of these values on n , and their relationships with each other.

As the value of n increases, these questions become problematic.

It is known that any segment $[\lambda, \lambda + n]$ on a given numerical axis contains $n + 1$ points, which are marked as numbers. Based on this, the existing mathematics reduces the problem of finding the values $\pi(n)$, $\nu(n)$, $E(n)$, $[\log_2 n]$ on an arbitrary segment $[\lambda, \lambda + n]$ to the problem of finding these quantities on the segment $[0, n]$. Therefore, we get rough estimates. Such as,

$$\pi(n^2) - \pi(n(n-1)) \neq \pi(n).$$

To convince us that we are right, the existing mathematics uses the methods of differential and integral calculus, which allow us to reduce the derivatives of the n -th degree to the derivative of the degree $n - 1$. And, ultimately, to the derived power of 3 or 2. But it is known what difficulties are encountered when solving differential and integral equations.

Matrix mathematics believes that any number segment with a length of $4N$ can be divided into two parts with a length of $2N$ each, or into four parts with a length of N each. This is equivalent to reducing the biquadratic equation to a quadratic one. Not forgetting that all even numbers on the number axis, except 2, are composite, therefore, the segment of numbers with length $4N$ contains $2N$ even $2N$ odd numbers. Therefore, the segment of numbers $4N$ can be divided into three parts.

This is how the equations (26.2), (26.3) were obtained, and they can be called square, or cubic. Because a number of the form $4xyz$ can always be considered as the numbers $2a^2$ or $2b^3$, where a and b are integer parts of the radicals $\sqrt{4xyz}$ and $(xyz)^{1/3}$.

Conservative mathematicians do not agree that the equations (26.2) and (26.3) contain only two unknowns, although they readily agree with differential and integral calculus. Perhaps they forgot how they got and evaluated the solutions of trigonometric equations on the number axis.

Matrix mathematics of a different opinion. Because dividing the segment $[\lambda, \lambda + 4xyz]$ on the number axis is equivalent to dividing the function $f(x, y, z) = 4xyz$ into functions $f_1(x) = x^2$, $f_2(y) = y^3$, $f_3(z) = z^4$.

Since on the numerical axis the concept of a number, and therefore a prime and composite number, is a relative concept, and they show points that are at a certain distance from the point that we take as the beginning of a given numerical axis.

Therefore, the equation (26.1) can be reduced to a biquadratic, cubic, or quadratic equation.

The equations (26.1) or (26.5) also have a certain number of solutions, and these solutions can be reduced to two or three natural numbers, because the solution of any equation of any degree shows the distance of the corresponding point from the beginning a given numerical axis (the number of unit segments), which can only be a natural number.

In the language of residual matrices, the theorem 26.2 (equations (26.1) and (26.5)) is trivial, because any numerical segment with length greater than or equal to 30 can be divided into three parts (equal, or unequal) On each of these segments, the number of primes is expressed by natural numbers.

Surprisingly, conservative mathematicians agree that a linear equation has one solution. After all, when solving a linear equation, we get whole, fractional, irrational, even transcendental ($\pi \approx 3.14..$) and indefinite results. How are they combined and called one solution?

By the way, Fermat noticed the refinement of Thales' theorem and applied it in his works, calling this approach the "method of infinite descent." Galois also proved in this way the theorem on the number of solutions to equations of any degree, and if he had not died tragically, he would have come to the ideas of matrix mathematics, because the concept of residues has been in the air since the time of Archimedes.

Summing up, we note that all the calculations that we did when proving the theorems of this collection are not always flawlessly accurate, because we tried to emphasize the advantage of the matrix mathematics method, not paying due attention to the calculation technique. For if the student makes a mistake when adding multi-digit numbers, this does not mean that the method of adding multi-digit numbers is wrong.

Moscow, 2017.

Chapter 27

True essence of natural zero (O_n) and function $c(m, n, n + 1)$

“... to find out the quality of a whole barrel it is not necessary to drink it to the bottom...”

27.1 Introduction

Matrix mathematics (the theory of residual matrices) shows that all problems of the number formation of the segment of numbers $[\lambda, \lambda + 2n]$ of the numerical axis using the residual matrices can be reduced to solving a numerical problem on the segment of numbers $[0, 2n]$, where $\lambda \geq 2n$. To do this, you need to find out the true essence of natural zero

$$0_n = \prod_{i=1}^m p_i, \quad m = \pi(n)$$

and the function $c(m, n, n + 1)$ i.e. what role they play on a given number axis.

27.2 Matrix expansion. Function $c(m, n, n + 1)$ in remainder matrices

Consider the matrix of residuals $M_{m,2n}(1)$, $m = \pi(n)$. Let's expand it, i.e. each number corresponding to each column of this matrix is further divided by the square of a prime number p_q^2 , where $2 \leq p_q \leq \pi(\sqrt{2(n+1)})$ and the resulting residuals will be entered into the corresponding columns of this matrix. It is clear that when the matrix $M_{m,2n}(1)$ is expanded, its width will increase and become equal to $i_* = i + i^*$. Therefore, $m_* = m + m^*$, where $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n+1})$. And the length of the matrix will not change, i.e. will remain equal to $2n$. The general view of the expanded matrix is denoted by $M_{m_*,2n}(1)$. The following relations hold

$$\begin{aligned} M_{m_*,2n}(1) &= M_{m_*,n}(1) + M_{m_*,n}(n+1), \\ \overline{M}_{m_*,n}(n+1) - \overline{M}_{m_*,n}(1) &= c_*(m_*, n, n+1) = c(m, n, n+1) + c^*(m^*, n, n+1). \end{aligned}$$

Since the matrices $M_{m_*,n}(n+1)$ and $M_{m_*,n}(1)$ have the same number of columns, but for $2 \nmid n$ the number of odd columns of the matrix $M_{m_*,n}(1)$ is 1 more than the number of

even columns of the matrix $M_{m_*,n}(n+1)$, and the number of even columns is vice versa. And for $2|n$ these matrices have the same number of even and odd columns. Thus, we have

$$c_*(m_*, n, n+1) \geq \begin{cases} -1, & \text{if } 2 \nmid n \\ 0, & \text{if } 2|n \end{cases}. \quad (27.1)$$

Strikethrough all those columns of the matrix $M_{m_*,2n}(1)$ each of which contains at least 2 zero remainders in the rows $1 < i \leq m = \pi(n)$ and $1 < i \leq \pi(\sqrt{2(n+1)})$, we define not only the function $c_*(m_*, n, n+1)$, but also those columns of this matrix, each of which corresponds to a prime number and a number of the form 2^s , $2 \leq 2^s \leq 2n$.

Theorem 27.1 *The relation*

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq [\log_2 n] - 1, \text{ if } n \geq 2.$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*,2n}(1)$, where $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2(n+1)})$. We represent it in the form

$$M_{m_*,2n}(1) = M_{m_*,n}(1) + M_{m_*,n}(n+1).$$

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq n$ and $1 < i^* \leq m^*$, $p_q^2 \neq 2^2$.

1. In the matrix $M_{m_*,n}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = [\log_2 n] + 1$, and the number of crossed out columns is $k_1 = n - k_1^*$.

2. In the matrix $M_{m,n}(n+1)$, the number of uncrossed columns is $k_2^* = \pi(2n) - \pi(n) + 1$, and the number of crossed out columns is $k_2 = n - k_2^*$.

Because among the numbers $n+1, n+2, \dots, 2n$ there is only one number like 2^s , $n < 2^s \leq 2n$.

Assuming $\pi(2n) - \pi(n) \geq 0$ and considering that

$$\overline{M}_{m_*,n}(n+1) - \overline{M}_{m_*,n}(1) = c_*(m_*, n, n+1),$$

get

$$\overline{M}_{m_*,n}^{k_2}(n+1) - \overline{M}_{m_*,n}^{k_1}(1) = c_*(m_*, n, n+1) + k_2 - k_1,$$

where $\overline{M}_{m_*,n}^{k_2}(n+1)$ and $\overline{M}_{m_*,n}^{k_1}(1)$ show the number of zero residuals in strikethrough matrix columns $M_{m,n}(n+1)$ and $M_{m_*,n}(1)$.

But since each column numbered n_j of these matrices contains $\pi(n) - \nu(n) = L_m(n_j)$ nonzero remainders, therefore,

$$\overline{\overline{M}}_{m_*,n}^{k_2^*}(n+1) - \overline{\overline{M}}_{m_*,n}^{k_1^*}(1) \geq [\log_2 n] - 1,$$

where $\overline{\overline{M}}_{m_*,n}^{k_2^*}(n+1)$ and $\overline{\overline{M}}_{m_*,n}^{k_1^*}(1)$ show the number of nonzero residuals in the uncrossed columns (k_2^* and k_1^*) of the matrices $M_{m,n}(n+1)$ and $M_{m_*,n}(1)$.

We get the same answer if in the matrices $M_{m,n}(n+1)$ and $M_{m_*,n}(1)$ we arrange the columns so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out. Comparing matrices with such an arrangement of columns, we note that in the uncrossed columns of the matrix $M_{m_*,n}(1)$ one column is empty, and the other columns have one zero remainder in rows $i = 1, i^* = 1$. And in the uncrossed columns of the matrix $M_{m,n}(n+1)$ only one column has one zero remainder in the row $i = 1$, and the rest do not contain zero remainders (empty). Since the number of columns in matrices $M_{m,n}(n+1)$ and $M_{m_*,n}(1)$ are equal to each other, and $c_*(m_*, n, n+1) \geq -1$, therefore, the theorem is beyond doubt.

Corollary 27.1 *The equation $\pi(2n) = 2\pi(n)$ has only two solutions, $n_1 = 4, n_2 = 10$.*

Proof of the corollary follows from the proof of Theorem 27.1. Since our mathematics is decimal, and the matrix $M_{m_*, 2n}(1)$ can be represented as

$$M_{m_*, 2n}(1) = N_{m_*, n}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, n}(2|2),$$

then note that for $n > 5$ the number of primes (columns) in the matrix $N_{m_*, n}(2 \uparrow 1)$ becomes more than $\lfloor \log_2 n \rfloor$.

Corollary 27.2 *The relation $\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lceil \frac{\pi(n)-1}{4} \right\rceil - 1$.*

Proof. In matrices $M_{m, n}(1)$ and $M_{m_*, n}(n+1)$, where $m = \pi(n)$, $m_* = m + m^* = m + \pi(\sqrt{2n+1})$, cross out all those columns, each of which has at least two zero remainders in rows $1 \leq i \leq m$, $1 \leq i^* \leq m^*$. Now, similarly to Theorem 27.1, we obtain

$$\begin{aligned} k_1^* &= \pi(n) + 1, \quad k_1 = n - k_1^*, \\ k_2^* &= \pi(2n) - \pi(n), \quad k_2 = n - k_2^*. \end{aligned}$$

If now we compare matrices with crossed out and uncrossed columns, then we get the statement Corollary 27.2..

Note. We would get the same result if we represented the matrix $M_{m_*, 2n}(1)$ in the form

$$M_{m_*, 2n}(1) = N_{m_*, n}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, n}(2|2).$$

Now, crossing out all those columns of matrices $N_{m_*, n}(2 \uparrow \lambda)$ and $N_{m_*, n}(2|\lambda)$, each of which has as at least two zero remainders in strings $1 \leq i < m = \pi(n)$ and $1 \leq i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{2n+1})$, you can determine the number of primes numbers on the segment of integers $[\lambda, \lambda + 2n]$ for $(\lambda, n) = \nu(n)$, $\lambda \geq n$.

Theorem 27.2 *The following relations hold:*

$$\begin{aligned} \pi(2n^2) - \pi(n^2) &= \pi(n^2) + \left\lceil \frac{\pi(2n) - 1}{4} \right\rceil + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}, \\ \pi(2n^2) - \pi(n^2) &= \pi(n^2) + \lfloor \log_2 n \rfloor + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*, 2n^2}(1)$, where $m = \pi(n^2)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n^2})$. We represent it in the form

$$M_{m_*, 2n^2}(1) = M_{m_*, n^2}(1) + M_{m_*, n^2}(n^2 + 1) = N_{m_*, n^2}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, n^2}(2|2).$$

We cross out all those columns in these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i < m = \pi(n^2)$ and $1 < i \leq \pi(\sqrt{2n^2})$.

1. In the matrix $M_{m_*, n^2}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(n^2) + 2\lfloor \log_2 n \rfloor$, and the number of crossed out columns are $k_1 = n^2 - k_1^*$.

2. In the matrix $M_{m_*, n^2}(n^2 + 1)$ we denote the number of uncrossed columns by k_2^* , and the number of crossed out columns we denote by k_2 .

$$k_2^* = \pi(2n^2) - \pi(n^2) + 1, \quad k_2 = n^2 - \pi(2n^2) + \pi(n^2) - 1 - 2\lfloor \log_2 n \rfloor,$$

or

$$k_2 = n^2 - \pi(2n^2) + \pi(n^2) - 1 + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{4} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Because among the numbers $n^2 + 1, n^2 + 2, \dots, 2n^2$ there is only one number like 2^s .

Because

$$\begin{aligned} & \overline{M}_{m_*, n^2}^{k_2}(n^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, n^2}^{k_1}(n^2 + 1) = \\ & = c_*(m_*, n^2, n^2 + 1) + \pi(n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{4} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} & \overline{M}_{m_*, n^2}^{k_2}(n^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, n^2}^{k_1}(n^2 + 1) = c_*(m_*, n^2, n^2 + 1) + \pi(n^2) + 2[\log_2 n] + \\ & + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Hence we obtain the assertion of the theorem.

Corollary 27.3 *The following relations hold*

$$\begin{aligned} \pi((2n)^2) &= 2\pi(2n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{2} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}, \\ \pi((2n^2)) &= 2\pi(2n^2) + [\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Proof. Considering the extended matrix $M_{m_*, (2n)^2}(1)$ and representing it as

$$M_{m_*, (2n)^2}(1) = M_{m_*, 2n^2}(1) + M_{m_*, 2n^2}(n^2 + 1) = N_{m_*, 2n^2}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, 2n^2}(2|2),$$

and crossing out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m = \pi(2n^2)$, $1 < i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{4n^2})$, note that

1. In the matrix $M_{m_*, 2n^2}(1)$, we denote the number of uncrossed columns by k_1^* , and the number of crossed out columns we denote by k_1 . We get

$$\begin{aligned} k_1^* &= 2\pi(n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(n) - 1}{2} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}, \\ k_1 &= 2n^2 - \pi(2n^2) + \pi(n^2) + 2[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

2. In the matrix $M_{m_*, 2n^2}(2n^2 + 1)$, the number of uncrossed columns is denoted by k_2^* , and the number of crossed out columns is denoted by k_2 .

$$\begin{aligned} k_2^* &= \pi((2n)^2) - \pi(2n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{2} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}, \\ k_2 &= 2n^2 - \pi(2n^2) + 2[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Comparing the columns of matrices by crossed out and uncrossed columns, we obtain the Corollary. because

$$c_*(m_*, 2n^2, 2n^2 + 1) = \left\lfloor \frac{\pi(2n) - 1}{2} \right\rfloor + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\},$$

or

$$c_*(m_*, 2n^2, 2n^2 + 1) = 2[\log_2 n] + \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}.$$

Chapter 28

Square residual matrices

Recall that a matrix $M_{m,n^2}(\lambda)$ is called square if the number of its columns is equal to the perfect square of a natural number.

Theorem 28.1 *The following relations hold:*

$$\pi(n^2) - \pi(n(n-1)) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},$$

$$\pi(n^2) - \pi(n(n-1)) \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - \nu(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*,n^2}(1)$, which can be represented as the sum of two shifted matrices

$$M_{m_*,n^2}(1) = M_{m_*,\lambda}(1) + M_{m_*,\lambda}(n+1),$$

where $\lambda = (n(n-1))$, $m = \pi(n(n-1))$, $m_* = \pi(\sqrt{n^2}) = \pi(n)$.

Let's cross out all those columns in these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m = \pi(\lambda)$ and $1 < i \leq m_* = \pi(n)$. Considering that the matrices $M_{m_*,\lambda}(1)$ and $M_{m_*,\lambda}(n+1)$ have common columns that correspond to the numbers $n+1, n+2, \dots, n(n-1)$, which can be ignored, note that

1. In the matrix $M_{m_*,n}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(n) + [\log_2 n]$, and the number of crossed out columns is $k_1 = n - k_1^*$.

2. In the matrix $M_{m_*,n}(\lambda+1)$, the number of uncrossed columns

$$k_2^* \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}$$

or

$$k_2^* \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - \nu(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}$$

Because, perhaps, among the numbers $\lambda+1, \lambda+2, \dots, n^2$ there is one number like 2^s , $\lambda < 2^s < n^2$. Therefore, other columns corresponding to even numbers are crossed out. Also strikethrough are all odd columns that have at least one non-zero remainder in the rows $1 < i \leq m = \pi(\lambda)$ and $1 < i \leq m_* = \pi(n)$. And this means that those columns of this matrix that are of the form p_i^s are also crossed out, where $2 < p_i \leq n$, $\lambda < p_i^s \leq n^2$.

Number of crossed out columns

$$k_2 \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - \nu(n)$$

or

$$k_2 \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - \nu(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}$$

Considering that

$$c_*(m_*, n^2, n^2 + 1) = \left\lfloor \frac{\pi(n)}{4} \right\rfloor + 1,$$

and comparing matrices with crossed out and uncrossed columns, we obtain Theorem 28.1.

Corollary 28.1 *Among the $2n$ consecutive integers taken from the collection of numbers $[n+1, n^2]$ there is at least $\left\lfloor \frac{[\log_2 n] - \nu(n)}{2} \right\rfloor - \nu(n)$ or $\left\lfloor \frac{\pi(n) - \nu(n)}{4} \right\rfloor - \nu(n)$ prime numbers.*

Proof of the corollary follows trivially from the theorem if we consider the matrices $M_{m_*, 2n}(1)$ and $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, where $n < \lambda \leq n^2$, with those columns strikethrough in each of which there are at least two zero residues in the rows $1 < i \leq m \leq \pi(\frac{n^2}{2})$ and $1 < i^* \leq m^* \leq \pi(n)$, and match them with crossed out and uncrossed columns.

Corollary 28.2 *The following relations hold*

$$a) \quad \pi(n^2) - \pi(n(n-1)) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - 1,$$

$$b) \quad \pi(n^2 + 2n) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - 1}{4} \right\rfloor - 1.$$

Proof.

a) Consider the extended matrices $M_{m_*, n}(1)$ and $M_{m_*, n}(n^2 + 1)$, where $m = \pi(n^2)$, $m_* = \pi(n)$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has one zero remainder in the lines $1 < i \leq m \leq \pi(n^2)$ and $1 < i^* \leq m^* \leq \pi(n)$.

1) In the matrix $M_{m_*, n}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = [\log_2 n] + 1$, and the number of crossed out $k_1 = n - [\log_2 n] - 1$.

2) In the matrix $M_{m_*, n}(n^2 + 1)$, the number of uncrossed columns is admissible $k_2^* = x$, and the crossed out $k_2 \geq n - x$. Suppose that among the numbers $n^2 - n + 1, n^2 - n + 2, \dots, n^2$ there may be one number of the form 2^s .

Comparing the matrices by crossed out and uncrossed columns, we get a corollary, or, more precisely, item a).

$$\pi(n^2) - \pi(n(n-1)) \geq \left\lfloor \frac{[\log_2 n] - 1}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) > 1 \\ 0, & \text{if } \nu(n) > 2 \end{cases},$$

because $\nu(n^2) = 1$ only for $n^2 = 2^s$.

b) Consider the extended matrices $M_{m_*, 2n}(1)$ and $M_{m_*, 2n}(n^2 + 1)$, where $m = \pi((2n-1)^2)$, $m_* = \pi(2n)$. We cross out all those columns of these matrices, each of which contains at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m \leq \pi(n^2)$ and $1 < i^* \leq m^* \leq \pi(2n)$. Calculating the number of crossed out and uncrossed columns in these matrices, we get

$$\pi(n^2 + 2n) - \pi(n^2) \geq \left\lfloor \frac{\pi(n) - 1}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 0, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 1, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Theorem 28.2 *The relation*

$$\pi(n^2) \geq 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) + \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) \geq 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) = 1 \end{cases},$$

if $n \geq 5$.

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*, n^2}(1)$, where $n \geq 5$, $m = \pi(\frac{n^2}{2})$, $m^* = \pi(n)$, $m_* = m + m^*$. We represent it in the form

$$M_{m_*, n^2}(1) = M_{m_*, \lambda}(1) + M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1), \quad \lambda = \frac{n^2}{2}.$$

We cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m$ and $1 < i^* \leq m^*$.

1. In the matrix $M_{m_*, \lambda}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(\lambda) + 2[\log_2 n] - 1$, and the number of crossed out columns there are columns $k_1 = \lambda - \pi(\lambda) - [\log_2 n]$.

Because the number 1 is not crossed out, and the number 2 is both prime and of the form 2^s .

2. In the matrix $M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1)$, we denote the number of uncrossed columns by $k_2^* = \pi(n^2) - \pi(\lambda) + 1$, because among the numbers $\lambda + 1, \lambda + 2, \dots, n^2$ there is only one number like 2^s .

And the number of crossed out columns in the matrix $M_{m_*, \lambda}(\lambda + 1)$ is $k_2 \geq \lambda - \pi(n^2) + \pi(\lambda) + \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor - 1$.

Because

$$\overline{M}_{m_*, \lambda}(\lambda + 1) - \overline{M}_{m_*, \lambda}(1) \geq c_*(m_*, \lambda, \lambda + 1) + \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Arranging the columns of matrices so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with such the arrangement of the columns, we get

$$\pi(n^2) = 2\pi(\lambda) + \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

or

$$\pi(n^2) = 2\pi\left(\frac{n^2}{2}\right) + \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

Since $\lambda = \frac{n^2}{2}$. This is the statement of Theorem 28.2.

Theorem 28.3 *Function $c_*(m_*, 2n, \lambda)$ where*

$$m_* = m + m^*, \quad m = \pi(n), \quad m^* = \pi(\sqrt{2n+1}), \quad (\lambda, 2n) = \nu(2n), \quad 2n < \lambda < 2n^2,$$

is defined by the formula

$$c_*(m_*, 2n, \lambda) \geq \pi(2n) - \pi(n) - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Proof. Consider the extended matrices $M_{m_*, 2n}(1)$ and $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, satisfying the conditions of the theorem. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. In the matrix $M_{m_*, 2n}(1)$, the number of crossed out columns is $k_1 = 2n - \pi(2n)$.
2. In the matrix $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, the number of crossed out columns is $k_2 = 2n - \pi(\lambda + 2n) - \pi(\lambda)$.

Since these matrices have the same number of columns, but in the matrix $M_{m_*, 2n}(\lambda)$ the number of crossed out columns is 1 more than the number of crossed out columns in the matrix $M_{m_*, 2n}(1)$, because the columns corresponding to the numbers 1 and 2 are not crossed out. But in the matrix $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, only those columns that correspond to prime numbers are not crossed out. Therefore, given that these matrices have the same number of columns and that

$$\overline{M}_{m_*, 2n}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2n}(1) = c_*(m_*, 2n, \lambda),$$

get

$$\overline{M}_{m_*, 2n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2n}^{k_1}(1) = c_*(m_*, 2n, \lambda) \geq \pi(2n) - \pi(n) - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Theorem 28.3 is proved.

Corollary 28.3 *The $c_*(m_*, 2n, \lambda)$ function shows not only the difference of zero residuals in crossed out matrix columns in the form $\overline{M}_{m_*, 2n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2n}^{k_1}(1)$, but also the difference of nonzero remainders in the same columns.*

Proof. Since the formula $L_m(n_j) + \nu(n_j) = \pi(n)$ defines the sum of the numbers of zero and nonzero remainders of the j th column of any matrix satisfying the conditions of the theorem, then the proof of the corollary follows trivially from Theorem 28.3.

Chapter 29

Secondary and mean residual matrices. Symmetric matrices

Theorem 29.1 *A residual matrix with a mean column consists of a certain number of secondary and mean matrices.*

Proof. Consider the matrix $M_{m,2N+1}(1)$. It has a middle column because its outermost columns correspond to odd numbers. Let $n = \lfloor \sqrt{2N+1} \rfloor$ and $m = \pi(n)$. We represent the matrix $M_{m,2N+1}(1)$ in the form

$$M_{m,2N+1}(1) = M_{m,kn}(1) + M_{m,kn}(kn+1) + \cdots + M_{m,kn}(2N+1-kn),$$

where $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$.

All matrices of the form $M_{m,kn}(1)$ and located on the edges of the matrix $M_{m,2N+1}(1)$, such as $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,n}(2N+1-n)$, or $M_{m,2n}(1)$ and $M_{m,2n}(2N+1-2n)$ are side matrices of the matrix $M_{m,2N+1}(1)$, and all matrices of the form $M_{m,n}(n+1)$ and $M_{m,n}(2N+1-2n)$, or $M_{m,2n}(2n+1)$ and $M_{m,2n}(2N+1-3n)$ are mean matrices of the matrix $M_{m,2N+1}(1)$. The theorem is proved.

Corollary 29.1 *The secondary and mean matrices that are at equal distances from the middle column of the matrix $M_{m,2N+1}(1)$ are called symmetric residual matrices and have the same number columns.*

Proof of the corollary follows trivially from the proof of the theorem.

Note. Side matrices can sometimes be called side matrices because they are located on the sides of the main matrix.

Theorem 29.2 *Any square matrix has a certain number of mean and side (side) remainder matrices.*

Proof. Recall that the number of columns in a square matrix is equal to the perfect square of a natural number. First, we prove the theorem for the initial square matrix, i.e. for the matrix $M_{m,n^2}(1)$, where $m = \pi(n)$, $2 \nmid n$. It is clear that the matrix $M_{m,n^2}(1)$ can be represented as

$$M_{m,n^2}(1) = M_{m,kn}(1) + M_{m,kn}(kn+1) + \cdots + M_{m,kn}(n^2-kn+1), \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Therefore, the matrices $M_{m,kn}(1)$ and $M_{m,kn}(n^2-kn+1)$ are side (side) matrices with respect to the middle column of the matrix $M_{m,n^2}(1)$, for $m = \pi(n)$, $2 \nmid n$. And the matrices

that are between the side matrices and have the same size are called middle matrices. For example, matrices $M_{m,n}(n+1)$ and $M_{m,n}(n^2-2n+1)$.

A similar theorem can be proved for the matrix $M_{m,n^2}(\lambda)$, where $m = \pi(n)$, regardless of the parity of $\lambda \geq 2$. Because the outermost columns of a square matrix correspond to numbers of the same parity.

Theorem 29.3 *There is at least one pair of twin primes on the numerical segment $[(p-1)^2, (p+1)^2]$.*

Proof. Consider the extended matrices $M_{m_*,(p-1)^2}(1)$ and $M_{m_*,(p-1)^2}(p+1)$, where $m = \pi((p-1)^2)$, $m^* = \pi(p)$, $m_* = m + m^*$. Let's cross out all those columns in these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$. And also those columns that correspond to primes p_k , where $p < p_k < (p-1)^2$. Paying attention to matrices with crossed out columns, note that

1. In the matrix $M_{m_*,(p-1)^2}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(p) + 1$, and the number of crossed out columns in this matrix is $k_1 = (p-1)^2 - \pi(p) - 1$. Since the column corresponding to the number 1 is not crossed out.

2. In the matrix $M_{m_*,(p-1)^2}(p+1)$, the number of uncrossed columns is $k_2^* = \pi((p-1)^2) - \pi(p) + \chi$. Where χ is the number of those primes p_k^* , where $(p-1)^2 < p_k^* < (p+1)^2$. And the number of crossed out columns in this matrix is

$$k_2 = (p+1)^2 - k_2^* = (p+1)^2 - \pi((p-1)^2) + \pi(p) - \chi - 1.$$

Because the outermost columns of this matrix are crossed out.

Arranging the columns of matrices so that crossed out columns are located on one side, and then uncrossed ones, and comparing the matrices with such arrangement of columns, we get $\chi = \pi(p) - 1$. Otherwise, we will not be able to assert that $0_n = \prod_{i=1}^m$, $m = \pi(p^2)$ if $n = p^2$.

Since χ shows the number of primes like p_k^* , therefore, each of these primes when divided by 2; 3; 4; 5 will give remainders equal to the numbers 2; 3; 4; 5 different options, therefore, among them there will be at least one pair of such primes that will give the remainders 2; 4, or 3; 5, which will be simple twins.

Corollary 29.2 *The following relation holds*

$$f^*(2^{2p}) - f^*(2^p) \geq f^*(2^p) - 1,$$

where the function $f^*(x)$ shows the number of pairs of twin primes on the segment $[1, x]$.

Proof of the corollary follows from the proof of the theorem. Consider the matrix

$$\begin{aligned} M_{m_*,(4n)^2}(1) &= M_{m_*,(2n)^2}(1) + M_{m_*,(2n)^2}((2n)^2 + 1) = \\ &= M_{m_*,4n}(1) + M_{m_*,4n}(4n+1) + \dots + M_{m_*,4n}((2n)^2 - 4n + 1), \end{aligned}$$

where $m = \pi((2n)^2)$, $m^* = \pi(2n)$.

Now, arguing as in the theorem, we obtain a corollary.

Theorem 29.4 *In each of the matrices $M_{m_*,2n}(\lambda)$, where*

$$(\lambda, 2n) = \nu(2n), \quad 2n < \lambda \leq (2n)^2, \quad m_* = m + m^*, \quad m = \pi(2n), \quad m^* = \pi(\sqrt{2n^2 + 1}),$$

contains at least $\left\lceil \frac{\pi(n)}{4} \right\rceil - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(2n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(2n) > 1 \end{array} \right\}$ columns, each corresponding to a prime number.

Proof. Consider the extended matrices $M_{m_*,2n}(1)$ and $M_{m_*,2n}(\lambda)$, where

$$(\lambda, 2n) = \nu(2n), \quad 2n < \lambda \leq (2n)^2, \quad m_* = m + m^*, \quad m = \pi(2n), \quad m^* = \pi(\sqrt{2n^2 + 1}).$$

Let's cross out all those columns in these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. In the matrix $M_{m_*,2n}(1)$, the number of crossed out columns is $k_1 = 2n - \pi(2n)$.

2. In the matrix $M_{m_*,2n}(\lambda)$, the number of crossed out columns is $k_2 = 2n - \pi(\lambda + 2n) + \pi(\lambda)$.

According to Theorem 28.3 we have

$$c_*(m_*, 2n, \lambda) \geq \left\lfloor \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

therefore, the relation holds

$$\overline{M}_{m_*,2n}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*,2n}^{k_1}(1) \geq c_*(m_*, 2n, \lambda) = \left\lfloor \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Or

$$\pi(\lambda + 2n) - \pi(\lambda) \geq \left\lfloor \frac{\pi(2n) - \pi(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

$$\pi(\lambda + 2n) - \pi(\lambda) \geq \left\lfloor \frac{\pi(n)}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Theorem 29.4 is proved.

Corollary 29.3 *The following relations hold*

$$a) \pi((2n)^2) \geq 2\pi(2n^2) + [\log_2 n] - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

$$b) \pi((2n)^2) \geq 2\pi(2n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(n) - 1}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Proof. Consider the matrices $N_{m_*,2n^2}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*,2n^2}(2|2)$, where $m_* = m + m^*$, $m = \pi(2n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n^2})$.

Let's cross out all those columns in these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq \pi(n^2)$ and $1 < i^* \leq m^*$.

1. In the matrix $N_{m_*,2n^2}(2 \uparrow 1)$, the number of uncrossed columns is

$$k_1^* = \pi((2n)^2) = 2\pi(2n^2) + [\log_2 n] - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

and the number of crossed out columns is $k_1 = 2n^2 - k_1^*$.

2. In the matrix $N_{m_*,2n^2}(2|2)$, the number of uncrossed columns is

$$k_2^* \geq 2\pi(2n^2) + [\log_2 n] - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases},$$

and the number of crossed out columns in this matrix is

$$k_2 \geq 2\pi(2n^2) + \left\lfloor \frac{\pi(n) - 1}{4} \right\rfloor - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

Arranging the columns of matrices so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with such the arrangement of the columns, and taking into account the function $c(m_*, 2n^2, 2n^2 + 1)$ in them, we obtain the statement Corollary 29.3.

Note. The same answers were obtained by considering the matrix

$$M_{m_*, (2n)^2}(1) = M_{m_*, 2n^2}(1) + M_{m_*, 2n^2}(2n^2 + 1),$$

where $m_* = m + m^*$, $m = \pi(2n^2)$, $m^* = \pi(2n)$.

Corollary 29.4 *For $k \geq 2$, the following relation holds:*

$$\pi(n^k) \geq (\pi(n) + 1)^k + \pi(n) - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*, n^k}(1)$. It can be represented as

$$M_{m_*, n^k}(1) = N_{m_*, \lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, \lambda}(2|2),$$

where $\lambda = \left\lfloor \frac{n^k}{2} \right\rfloor$, $m = \pi(\lambda)$, $m^* = \pi(\sqrt{n^k})$.

Let's cross out all those columns in these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m = \pi(\lambda)$ and $1 < i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{n^k})$.

1. In the matrix $N_{m_*, 2n^2}(2 \uparrow 1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(2\lambda)$, and the number of crossed out columns is $k_1 = 2\lambda - \pi(2\lambda)$.

2. In the matrix $N_{m_*, \lambda}(2|2)$, the number of uncrossed columns is $k_2^* = 2\pi(\lambda) + 2[\log_2 \sqrt{\lambda}] - 2$, and the number of crossed out columns in this matrix is $k_2 = 2\lambda - k_2^*$.

Because when crossing out even columns of the matrix $M_{m_*, n^k}(1)$, the columns corresponding to the numbers 2 and 2^s are not crossed out. Hence

$$\overline{N}_{m_*, \lambda}^{k_2}(2|2) - \overline{N}_{m_*, \lambda}^{k_1}(2 \uparrow 1) = c_*(m_*, \lambda, \lambda + 1).$$

We get

$$\pi(n^k) \geq (\pi(n) + 1)^k + 2[\log_2 n^k] - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(2n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(2n) > 1 \end{cases}.$$

On the other hand, if we crossed out all those columns, each of which would have at least two zero residuals in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$, then we would get the statement Corollary 29.4.

Corollary 29.5 *If $2 \leq k \leq n$, then the following relations hold:*

$$a) \pi(n^k) \geq (\pi(n) + 1)^2 + 2[\log_2 k] - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases},$$

$$b) \pi(n^k) \geq (\pi(n) + 1)^2 + \pi(n) - \begin{cases} 1, & \text{if } \nu(n) = 1 \\ 0, & \text{if } \nu(n) > 1 \end{cases}.$$

Proof. Consider the extended matrices $N_{m_*, \lambda}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*, \lambda}(2|2)$, where $\lambda = \left\lfloor \frac{n^k}{2} \right\rfloor$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi(\lambda)$, $m^* = \pi(\sqrt{n^k})$.

a) Cross out all those columns in these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m = \pi(\lambda)$ and $1 \leq i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{n^k})$.

1. In the matrix $N_{m_*,\lambda}(2 \uparrow 1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(2\lambda)$, and the number of crossed out columns is $k_1 = 2\lambda - \pi(2\lambda)$. Because the column corresponding to the number 1 is also not crossed out.

2. In the matrix $N_{m_*,\lambda}(2|2)$, the number of uncrossed columns is $k_2^* = \pi(2\lambda) + 2[\log_2 k] - 2$, and the number of crossed out columns in this matrix is $k_2 = 2\lambda - k_2^*$.

Because the columns corresponding to the numbers 2 and 2^s , where $\lambda < 2^s \leq 2\lambda$, are not crossed out. Because

$$\overline{N}_{m_*,\lambda}^{k_2}(2|2) - \overline{N}_{m_*,\lambda}^{k_1}(2 \uparrow 1) = c_*(m_*, \lambda, \lambda + 1),$$

then we obtain item a) of Corollary 29.5.

b) If we crossed out all those columns of these matrices in each of which there are at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m = \pi(\lambda)$ and $1 \leq i^* \leq m^*$, you would get.

1. The number of uncrossed columns $k_1^* = \pi(2\lambda)$, and the number of crossed out columns $k_1 = 2\lambda - \pi(2\lambda)$.

2. In the matrix $N_{m_*,\lambda}(2|2)$, the number of uncrossed columns is $k_2^* = \pi(2\lambda) + 2[\log_2 k] - 2$, and the number of crossed out columns in this matrix is $k_2 \geq 2\lambda - k_2^* - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(n) > 1 \end{array} \right\}$.

From this we immediately obtain item b) of Corollary 29.5.

Corollary 29.6 *If $2 \leq k \leq n$, then the following relations hold:*

$$\begin{aligned} a) \quad \pi(2^k) &\geq (\pi(2^{k-1}) + 1)^2 + 2[\log_2 2^k] - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(n) > 1 \end{array} \right\}, \\ b) \quad \pi(2^k) &\geq (\pi(2^{k-1}) + 1)^2 + \pi(2^{k-2}) - \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ if } \nu(n) = 1 \\ 0, \text{ if } \nu(n) > 1 \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Proof. Consider the extended matrices $N_{m_*,2^k}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*,2^k}(2|2)$, where $m_* = m + m^*$, $m = \pi(2^{k-1})$, $m^* = \pi(\sqrt{2^k})$.

Striking out all those columns in these matrices, each of which has at least two zero residuals

a) in the lines $1 < i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$;

b) in the lines $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$;

and arguing in the same way as in the proof of Corollary 3, we obtain the statement of Corollary 29.6.

Note. If the remainder matrices show that the natural zero (0_n) takes the values $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$, $m = \pi(n)$, then the extended residual matrices show that

$$0_n^* = \prod_{i=1}^m p_i + \prod_{q=1}^{m^*} p_q,$$

where $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{n})$.

Therefore, the number ZERO (0), which, as we assume, is a multiple of all integers, leads to uncertainties on the number axis. The remainder matrices limit the divisor area of the ZERO number for square matrices. The double sieve method showed this constraint for the left and right reference points.

Chapter 30

Numeric Axis Combinatorics

Application of the well-known combinatorial formula $C_a^b = C_a^{a-b}$ for $a = n$, $b = \pi(n)$ leads to the relation $C_n^{\pi(n)} = C_n^{n-\pi(n)}$ or $C_n^{\pi(n)-1} = C_n^1$. This raises a number of interesting questions in the case when we want to apply it to determine the number of prime and composite numbers on the numerical segments $[1, 2n]$ and $[1, n^2]$, where n is an integer... The theorems that were proved in the previous sections confirm this. Strikethrough columns of the extended matrix $M_{m_*, n^2}(1)$, where $m_* = m + m^*$, $m = \pi(\frac{n^2}{2})$, $m^* = \pi(n)$, actually indicates the consequences of the formula $C_n^{\pi(n)-1} = C_n^1$. Strikethrough in the matrix $M_{m_*, n^2}(1)$ all those columns of this matrix, each of which has at least two zero residuals, we, in fact, select all those columns of this matrix that correspond to composite numbers. Since each column of the matrix $M_{m_*, n^2}(1)$ contains $\pi(n)$ zero and nonzero residuals, therefore $m^* = \pi(n)$ becomes an expanding factor because if $p_q^2 | n_j^2$, then $p_q | n_j$ and $p_q^s | n_i^2$, where

$$2 \leq n_j \leq n^2, \quad 2 \leq p_q \leq [\sqrt{n^2}], \quad 2 \leq p_q^s \leq n^2.$$

As a result, we get that the formula $C_n^{\pi(n)} \simeq C_{n^2}^{n^2-\pi(n)}$ and the double sieve method are equivalent on the number axis and are the reason for the formation of side (side) and middle matrices in the matrices of residues.

On the other hand, the question arises: can the process of such a number formation be extended to the negative section of the number axis? Indeed, considering the matrices $M_{m_*, 2n}(1)$ and $M_{m_*, n^2}(1)$, we study only positive numbers!

It is not difficult to see that the natural zero 0_n , restricting the numerical axis, turns it into a sum of segments having the same dimensions in the form of matrices. Number formation on which occurs almost according to the same laws that dictate mathematical actions.

The theory of residual matrices (matrix mathematics) convinces us that there are no dimensionless numbers on the number axis, each of them shows a certain number of unit segments having a certain length.

Therefore, not only a composite number, but also a prime number is the sum of unit segments and can be represented as a product of two numbers. Of course, a prime number cannot be represented as a product of at least two primes, so a prime number is a multiple of only one, and the fact that a prime number is considered a multiple of itself is a convention.

Since from the fact that $p_i | p_i^s$ it follows that $p_i | p_i$. Taking p_i^s as a unit, p_i becomes p_i^s , because walking from the point p_i with the step length p_i , we go through k steps step on the point p_i^s . Moving in the opposite direction from the point p_i^s with the same step length, after k steps we will also step on the point p_i . Therefore, the concept of a number

on a numerical axis depends not only on the point of origin, but also on the direction of calculation of unit segments. This follows from the main axiom of our mathematics that the number 0 is a multiple of all integers. Therefore, we are surprised when we meet with the formulas $0! = 1$ or $C_a^0 = 1$.

Matrix mathematics tries to smooth out the conventions that exist in existing mathematics and faces huge difficulties created by fans of traditional mathematics, for whom there is no difference between length and surface area, or volume. They were forced to admit the existence of irrational and imaginary numbers, without delving into the true essence of these numbers. This is especially manifested when solving equations of any degree, because it is impossible to really understand the mechanics of solving an equation, and how the equation differs from equality and from identity.

In addition to the above, consider the equations a) $2x - 30 = 0$ and b) $2x - x^{30} = 0$. We assume that equation a) has one solution $x = 15$, and equation b) has 30 solutions. And it is not clear by what criteria the number of these decisions is determined.

In matrix mathematics, these equations are considered as collections of numbers

$$a) 1, 2, 3, \dots, 30; \quad b) 1, 2, \dots, x^{30}.$$

And you need to find the number of steps of a certain length, so that starting the movement from point (number) 1 through a certain number of steps to step on point a) 30, b) x^{30} .

In case a) these are prime or all divisors of 30, in case b) $\nu(30x)$.

This approach leads us to the fact that any equation of any degree has a certain number of integer solutions, which, using differentiation, can be reduced to solving a quadratic, biquadratic, or cubic equation. This proves that the number 0 cannot be a multiple of all integers. Because it goes against the definition of a number axis.

Taking the concept of natural zero

$$0_n^* = \prod_{i=1}^m p_i + \prod_{q=1}^{m^*} p_q,$$

where $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{n})$, we limit the number of integers in the segment $[\lambda, \lambda + n]$. We represent them in the matrix $M_{m_*, 2n}(\lambda)$, where

$$(\lambda, n) = \nu(n), \quad m_* = m + m^*, \quad m = \pi\left(\frac{n^2}{2}\right), \quad m^* = \pi(n),$$

and we study each column of this matrix, both along the number axis and vertically. Therefore, any column of a square matrix shows a real number, and its middle column becomes the main point (column) of reference for calculating the remaining columns (numbers) in this matrix.

This approach to the number axis leads us to the fact that number formation does not depend on the part of the matrix that is located on the negative part of the number axis, because not only the matrix $M_{m_*, n^2}(1)$ is square but also the matrix $M_{m_*, n^2}(-n)$. Therefore, the laws of number formation on them proceed almost according to the same laws.

Since each column of the matrix is characterized not only by zero, but also by non-zero remainders, the formula

$$L_{m_*}(n_j) + \nu_{m_*}(n_j) = \pi_{m_*}(n_j)$$

becomes the main characteristic for the column with ordinal n_j . Of course, it is necessary to accurately determine the sum $m_* = m + m^*$, which we symbolically denote $\pi_{m_*}(n_j)$.

Residual matrices assert that marking a point on a virtual line that turns this line into a number axis, in fact determines the geometrical places of all numbers that are on the left and right sides of the point, which we call the beginning of this number axis, and all numbers on this axis become equal.

This leads to the fact that numbers of the form 2^s , where $1 < 2^s \leq n$, $2 \nmid s$, are called irrational because not only they are equidistant from the middle column of the matrix $M_{m_*,n^2}(1)$, but also prime numbers p_k , where $n(n-1) < p_k < n^2$. Considering the matrix $M_{m_*,n^2}(-n)$ for the same reason the columns of the interval $[-n, -1]$, each of which contains only one zero remainder in the rows $1 < i < m$ and $1 < i^* \leq m^*$, are called simple columns, and their corresponding numbers are called imaginary, because although they are negative, they are still integers. In this sense, negative numbers can be called residuals, because the residuals (residues) are determined modulo.

Thus, the simple columns of the matrix $M_{m_*,n^2}(-n)$, which are in the range of integers $[-n, -1]$, and the columns of the matrix $M_{m_*,n^2}(1)$, which correspond to numbers of the form 2^s , where $1 < 2^s < n$, $2 \nmid s$, can be called potentially prime numbers, because they generate new primes on the segment of integers $[(n-1)^2, n^2]$. Given the relativity of the concept of a number on the numerical axis, some primes from the range of numbers $[(n-1)^2, n^2]$ can be called irrational, and some imaginary, depending on the point that we consider the starting point for them.

In addition, for a natural value of x and y , we have

$$x^y = 0_n \implies x^n = 0_n \implies x^n = N_1,$$

where $N_1 \gg n$ and using the remainder matrices we can determine $\pi(N_1)$, because the matrix $M_{m,n^2}(1)$, $m = \pi(n)$, can always be represented as the sum of a certain number of residual matrices $M_{m,n}(1)$, where $m = \pi(n)$.

The processes of root extraction, logarithm and differentiation will help us in this, if we consider the number x as a function $f(x) = x^n$, and n as a specific number. Therefore, the process of differentiation can be seen as the opposite action of raising x to the power of n (a specific number). This approach will help us define $\pi(x^p)$ using $\pi(x)$ and $[\log_2 x]$, or $\pi(2x)$ and $[\log_2 2x]$, or using $[\log_2 n]$ and $[\log_2 2n]$.

In this process, it turns out that the primes 2, 3 and 5 play a major role in the number-forming of numbers on the number axis, because the other primes are of the form $4x - 1$ and $4x + 1$. Therefore, any equation that has as many solutions as the largest degree of this equation can be reduced to a quadratic, cubic or biquadratic equation. Although it is difficult to imagine this without the theory of residual matrices.

Chapter 31

Potentially Prime Numbers and Equations

With the help of the remainder matrices, not only the problems of the distribution of primes on the segment of integers $[\lambda, 2\lambda + 1]$ are solved, but also the equation

$$x^n + a_1x^{n-1} + \dots + 1 = 0, \quad -x < a_i < x. \quad (31.1)$$

(31.1) are considered as the sum of various equalities, or identities in the form of residual matrices, in which you need to find the number of columns corresponding to prime or composite numbers. For example,

$$\begin{aligned} M_{m,n^2}(1) &= M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n+1) + \dots + M_{m,n}(n^2 - n + 1) = \\ &= M_{m,2n}(1) + M_{m,2n}(2n+1) + \dots + M_{m,2n}(n^2 - 2n + 1) = \\ &\dots\dots\dots \\ &= M_{m,kn}(1) + M_{m,kn}k(n+1) + \dots + M_{m,kn}(n^2 - kn + 1) = \\ &= M_{m,\lambda}(1) + M_{m,\lambda}(\lambda+1) = N_{m,\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m,\lambda}(2|2), \end{aligned}$$

where $\lambda = \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor$.

Theorem 31.1 For $p > 3$, the following relation holds:

$$2\pi(p^2) + \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1 \geq \pi(2p^2) \leq 2\pi(p^2) + [\log_2 p] + 1. \quad (31.2)$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*, 2p^2}(1)$, where $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$, $m_* = m + m^*$. We represent it in the form

$$M_{m_*, 2p^2}(1) = M_{m_*, p^2}(1) + M_{m_*, p^2}(p^2 + 1).$$

We cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m = \pi(p^2)$ and $1 < i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$.

1. In the matrix $M_{m_*, p^2}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(p^2) + 2[\log_2 p]$, and the number of crossed out columns there are columns $k_1 = p^2 - k_1^* = p^2 - \pi(p^2) - 2[\log_2 p]$.

Because the matrix $M_{m_*, p^2}(1)$ has $2[\log_2 p]$ columns. Each of which contains one zero in the lines $i = 1$ and $i^* = 1$. And these columns are not crossed out.

2. In the matrix $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$, the number of uncrossed columns is

$$k_2^* = \pi(2p^2) - \pi(p^2) + 1,$$

and the number of crossed out columns

$$k_2 = p^2 - k_2^*,$$

because among the numbers $p^2 + 1, p^2 + 2, \dots, 2p^2$ there is only one number of the form 2^s , $p^2 < 2^s < 2p^2$.

Because

$$\overline{M}_{m_*, p^2}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}(1) = c_*(m_*, p^2, p^2 + 1),$$

then, therefore, we have the relations

$$\overline{M}_{m_*, p^2}^{k_2}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}^{k_1}(1) = c_*(m_*, p^2, p^2 + 1) - \pi(2p^2) + \pi(p^2) - 1. \quad (31.3)$$

Hence,

$$\overline{M}_{m_*, p^2}^{k_2^*}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}^{k_1^*}(1) = c_*(m_*, p^2, p^2 + 1) - \pi(p^2) - 2[\log_2 p] - 1. \quad (31.4)$$

Here k_2 and k_1 are the number of those columns of matrices $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ and $M_{m_*, p^2}(1)$, each of which contains at least two zero residues in the crossed out lines $1 < i \leq m$ and $1 < i^* \leq m^*$.

Subtracting (31.4) from (31.3), and considering that

$$\overline{M}_{m_*, p^2}^{k_2}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}^{k_1}(1) \geq \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1,$$

and

$$\overline{M}_{m_*, p^2}^{k_2^*}(p^2 + 1) - \overline{M}_{m_*, p^2}^{k_1^*}(1) \geq [\log_2 p],$$

we get the expression (31.2). Thus, Theorem (31.1) is proved.

Corollary 31.1 *For $p > 3$, the following relation holds:*

$$\pi(2p^2) - 2\pi(p^2) = [\log_2 2p^2] - [\log_4 2p^2]. \quad (31.5)$$

Proof. Consider the extended matrices $M_{m_*, p^2}(1)$ and $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$, where $p > 3$, $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$, $m_* = m + m^*$. We cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m = \pi(p^2)$ and $1 < i^* \leq m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$.

1. In the matrix $M_{m_*, p^2}(1)$, the number of crossed out columns is $k_1 = p^2 - \pi(p^2) - 2[\log_2 p]$, therefore that the columns corresponding to the numbers 1 and 2 are not crossed out, but the columns corresponding to the numbers $2p_i^k$, where $p_i > 3$, $4 < 2p_i^k \leq p^2$, $2 < k \leq [\sqrt{2p}]$, all strikethrough.

2. In the matrix $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$, the number of crossed out columns is $k_2 = p^2 - \pi(2p^2) + \pi(p^2)$ because all other columns are crossed out, given that $k_1^* - k_2^* = [\log_4 2p^2]$.

Subtracting k_2^* from k_1^* , we get

$$\pi(2p^2) - 2\pi(p^2) = [\log_2 2p^2] - [\log_4 2p^2] = [\log_2 p].$$

Corollary 31.2 *For $p > 5$, the following relation holds:*

$$\pi(2p^2) - 2\pi(p^2) = [\log_3 2p^2] + [\log_5 2p^2] - 1 = [\log_2 p]. \quad (31.6)$$

Proof. Consider the extended matrix $M_{m_*, 2p^2}(1)$, where $p > 5$, $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p^2})$, $m_* = m + m^*$. We represent it in the form

$$M_{m_*, 2p^2}(1) = M_{m_*, p^2}(p^2 + 1) + M_{m_*, p^2}(1).$$

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$. But $p_q^2 \neq 3^2$, $p_q^2 \neq 5^2$.

1. In the matrix $M_{m_*, p^2}(1)$, the number of uncrossed columns is

$$k_1^* = \pi(p^2) + [\log_3 2p^2] + [\log_5 2p^2] + 1,$$

and the number of crossed out columns is

$$k_1 = p^2 - \pi(p^2) - [\log_3 2p^2] - [\log_5 2p^2] - 1.$$

2. In the matrix $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$, the number of uncrossed columns $k_2^* \geq \pi(2p^2) + \pi(p^2) + 2$.

Among the numbers $p^2 + 1, p^2 + 2, \dots, 2p^2$, perhaps there is one number of the form 3^s , where $p^2 < 3^s < 2p^2$, and one number of the form 5^s , where $p^2 < 5^s < 2p^2$.

Arranging the columns of matrices so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with such the arrangement of the columns, we get the expression (31.6). Because although the total number of columns in matrices is equal, but the number of even columns in the matrix $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ is one more than the number of even columns in the matrix $M_{m_*, p^2}(1)$, and the number of odd columns in the matrix $M_{m_*, p^2}(p^2 + 1)$ is one less than the number of even columns in the matrix $M_{m_*, p^2}(1)$. Therefore, we get the expression (31.6).

Note. Since the value of $\pi(2p^2) - 2\pi(p^2)$ can be precisely determined using the remainder matrices, therefore, any problem of number formation on the number axis can be determined exactly... This is what Corollaries 31.1 and 31.2 tell us.

Theorem 31.2 *In the matrix $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, where $\lambda > 2p$, $(\lambda, 2p) = \nu(2p)$ there are at least $\left\lceil \frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right\rceil - 1$ columns, each corresponding to a prime number.*

Proof. Consider the extended matrices $M_{m_*, 2p}(1)$ and $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, which satisfy the conditions of our theorem and where $m = \pi(2p)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p + 1})$, $m_* = m + m^*$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. In the matrix $M_{m_*, 2p}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(2p) + 1$, and the number of crossed out columns is $k_1 = 2p - \pi(2p) - 1$. Since the column corresponding to the number 1 is not crossed out.

2. In the matrix $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, we denote the number of uncrossed columns by $k_2^* = X$. The value X shows those columns of this matrix that correspond to the primes p_k , $\lambda < p_k < \lambda + 2p$. Then the number of crossed out columns of this matrix is $k_2 = 2p - X$.

Because

$$\overline{M}_{m_*, 2p}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2p}(1) = c_*(m_*, 2p, \lambda),$$

or

$$\overline{M}_{m_*, 2p}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2p}^{k_1}(1) \geq c_*(m_*, 2p, \lambda) + \left\lceil \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rceil - 1,$$

we get that $k_2^* - k_1 \geq \left\lceil \frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right\rceil - 1$, that is $X \geq \left\lceil \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rceil - 1$. These relations prove Theorem 31.2.

We get the same answer if we arrange the columns of the matrices so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and taking into account that in the matrix $M_{m_*, 2p}(\lambda)$ even columns on one more than in the matrix $M_{m_*, 2p}(1)$, and comparing the matrices with such an arrangement of columns, we obtain the expression $X \geq \left\lceil \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rceil - 1$.

Otherwise, we get that the matrices $M_{m_*, 2p}(1)$ and $M_{m_*, 2p}(\lambda)$ do not have the same number of columns.

Corollary 31.3 *For $p \geq 3$, the following relation holds:*

$$\pi(p^2 + 2p) - \pi(p^2) \geq \left\lceil \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rceil - 1.$$

Proof of Corollary 1 follows directly from the theorem.

Corollary 31.4 *The following relations hold*

$$a) \pi(2p^2) \geq 2\pi(p^2) + [\log_2 p],$$

$$b) \pi(2p^2) \geq 2\pi(p^2) + \left\lceil \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rceil - 1.$$

Proof. Consider the extended matrices $M_{m_*, 2p^2}(1)$ and $M_{m_*, 2p^2}(2p + 1)$, where $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(2p)$, $m_* = m + m^*$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows

$$a) 1 < i \leq m, \quad 1 < i^* \leq m^*,$$

$$b) 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq i^* \leq m^*.$$

Considering the difference between the crossed out and uncrossed columns of these matrices, as in the proof of the Theorem, we obtain the statement Corollary 31.4.

Corollary 31.5 *The following relation holds*

$$\pi(4p^2) = 2(\pi(2p^2) + [\log_2 p]) = 2\pi(2p^2) + \left\lceil \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rceil - 1.$$

Proof. The ratio is fair

$$M_{m_*, 4p^2}(1) = M_{m_*, 2p^2}(1) + M_{m_*, 2p^2}(2p^2 + 1).$$

Hence, using Corollary 31.4, we obtain Corollary 31.5.

Corollary 31.6 *The following relations hold*

$$a) \pi(2^{2p}) \geq (\pi(2^p))^2 + \pi(2^p) - 1, \quad p \geq 3,$$

$$b) \pi(2^{4p}) \geq (\pi(2^{2p}))^2 + (\pi(2^p))^2 - 1.$$

Proof. To prove part a), consider the extended matrices $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$ and $M_{m_*, 2^{2p}}(2^p + 1)$ where $m = \pi(2^{2p})$, $m^* = \pi(2^p)$, $m_* = m + m^*$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. In the matrix $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(2^{2p}) + 1$, and the number of crossed out columns there are columns $k_1 = 2^{2p} - \pi(2^{2p}) - 1$.

2. In the matrix $M_{m_*, 2^{2p}}(2^p + 1)$, the number of uncrossed columns is $k_2^* = \pi(2^{2p}) - \pi(2^p) + X$. The value X is the number of those columns of this matrix, each of which is not crossed out and corresponds to a prime number p_k , $2^{2p} < p_k < 2^{2p} + 2^p$. Then the number of crossed out columns of this matrix is $k_2 = 2^{2p} - \pi(2^{2p}) + \pi(2^p) + X$.

Comparing matrices with crossed out and uncrossed columns, we obtain the proof of item a) of Corollary 31.6.

To prove part b), we need to consider the matrices $M_{m_*, 2^{4p}}(1)$ and $M_{m_*, 2^{4p}}(2^p + 1)$ and, arguing in the same way as in part a), obtain the proof of part b).

Explanation. Combinatorics are combined with mathematical induction with the remainder matrices on the number axis. From the validity of the theorem for the value of the prime number p_k , we obtain the proof of the same theorem for the number p_{k+1} , or for the number p_k^2 .

Because a prime number on the number axis can play the role of a unit segment.

In this sense, a numerical segment of length p_k cannot be divided into equal parts with length p_k^* , where $2 \leq p_k^* < p_k$. Because the scale of the numerical axis is predefined and determines the number of points on the given numerical axis, which we call numbers. Therefore, the prime number 2 becomes the main characteristic not only for even, but also for odd numbers. It (number 2) separates even and odd numbers from each other, bringing them to the same dimension, since even and odd numbers can be reduced to the number of two unit segments.

Taking the number ZERO (0) to be a multiple of all integers, we should not forget that this axiom implies that a numerical segment cannot be divided into arbitrarily equal parts, and the number of points on a given numerical axis, which we call numbers, cannot be innumerable... Prime numbers on the numerical plane create a complex system of numerical axes, which in a rectangular coordinate system in the form of virtual lines occupy not only the numerical plane, but also the numerical space. At the points of intersection of these straight lines, not only simple, but also composite numbers are distributed, since the distance of these vertical and horizontal lines is equal to a certain number of unit segments, then the number formation at the intersection of these straight lines is set by mathematical operations.

Addition-multiplication, subtraction-division, root-raising-exponentiation, differentiation-integration, depend on the point that we consider the origin. Taking the notion of a natural zero (0_n), we restrict the limits of the spatial and planar lattice, restricting the values of the functions $\pi(n)$ and $\nu(n)$ on the segments $[1, 2n]$ and $[1, (2n)^2]$, reducing them to the number of primes on the segment $[1, n]$. Therefore, the formula $L_m(n_i) + \nu(n_i) = \pi(n_i)$ becomes the main characteristic of numerical processes on the numerical axis.

Theorem 31.3 *The following relations hold:*

$$\pi(2^{2p}) \leq 2\pi(2^{2p-1}) + 4[\log_2 p] - 1,$$

$$\pi(2^{2p}) \geq 2\pi(2^{2p-1}) + \pi(p) - 1.$$

Proof. We represent the extended matrix $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$ as

$$M_{m_*, 2^{2p}}(1) = N_{m_*, \lambda}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, \lambda}(2|2),$$

where $\lambda = 2^{2p-1}$, $m = \pi(2^{2p-1})$, $m^* = \pi(2^p)$, $m_* = m + m^*$.

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$. Arguing similarly to the proof of Corollary 29.2, we obtain Theorem 31.3.

Corollary 31.7 *For primes p , the following relation holds:*

$$\pi(2^{2p}) - \pi(2^{2p} - 6) = \pi(6) - 1 = 2.$$

Proof. Consider the matrices $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$ and $M_{m_*, 2^{2p}-6}(6)$, where $m = \pi(2^{2p})$, $m^* = \pi(2^p)$, $m_* = m + m^*$. Let's cross out all those columns of these matrices that correspond to even numbers, and those columns, each of which has at least two zero residuals. Considering that those columns of these matrices that correspond to the numbers $6, 7, \dots, 2^{2p} - 6$ are common, they can also be considered crossed out, because they have the same number of zero and non-zero residues in both matrices. Therefore, in the matrix $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$, the columns corresponding to the numbers $1, 3, 5$ and $2^{2p} - 3$ and $2^{2p} - 5$. Because the number $2^{2p} + 1$ cannot be a multiple of 3, because $2^{2p} + 1$ is always a number of the form $p = 4k + 1$ and the number $2^{2p} - 1$ is a multiple of 3, and the number $2^{2p} + 1$ is a multiple of 5. Therefore, the numbers $2^{2p} - 3$ and $2^{2p} - 5$ correspond to prime numbers, that is, simple twins. Corollary 31.7 is proved.

Chapter 32

Complete and Adjacent Remnant Matrices

Definition 32.1 Matrix $M_{m,2n+1}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, whose end columns correspond to numbers of the same parity, are called complete remainder matrices.

Definition 32.2 Matrix $M_{m,2n}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, in which the number of even columns is equal to the number of odd columns, is called the adjacent residual matrix.

Definition 32.3 Matrix $M_{m,n^k}(\lambda)$, $m = \pi(n)$, where k, n, λ are natural numbers, $2 \leq k \leq n < \lambda$, is called the power matrix of the remainders.

Theorem 32.1 Any power matrix is complete, but not contiguous.

The proof of the theorem is trivial, because the extreme columns of the power matrix are of the same parity, so it is complete, but not adjacent, since the number of even and odd columns differs by 1.

Corollary 32.1 A complete matrix has a middle column that corresponds to a number of the same parity as its outermost columns.

The proof of the corollary is trivial.

Corollary 32.2 A complete matrix can be made contiguous by removing one column from one end of the matrix, or adding another column to one end.

Corollary 32.3 In full and adjacent matrices, both even and odd columns are shifted relative to each other by a distance of 2 unit segments.

Proof of the corollary follows trivially from the definition of the number axis.

Theorem 32.2 The following relations hold:

$$a) \pi(2p^2 + 2p) - 2\pi(p^2) \geq \left\lceil \frac{[\pi(p)] - 1}{4} \right\rceil - 1,$$

$$b) \pi(2p^2 + 2p) - 2(\pi(p))^2 \leq \frac{\pi(p)}{2} + 1.$$

Proof. We represent the matrix $M_{m_*,2p(p+1)}(1)$ in the form of the matrix $M_{m_*,2p^2}(1)$ and the matrix $M_{m_*,2p^2}(2p+1)$, where $m = \pi(p^2)$, $m^* = \pi(2p)$, $m_* = m + m^*$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the

rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$. Paying attention to matrices with crossed out columns, note that

1. In the matrix $M_{m^*, 2p^2}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(2p^2) + 1$, since the column corresponding to the number 1 is also not crossed out. And the number of crossed out columns in this matrix is $k_1 = 2p^2 - \pi(2p^2) - 1$.

2. In the matrix $M_{m^*, 2p^2}(p+1)$, the number of uncrossed columns (corresponding to prime numbers) is $k_2^* \geq \pi(2p^2 + 2p) - \pi((p-1) + X - 1)$. The value X is the number of those columns of this matrix that correspond to the primes p_k , where $(2p-1)^2 < p_k < (2p+1)^2$.

In the proof of part a) we use the notation X_a , and in the proof of part b) we use the notation X_b .

Arranging the columns of matrices so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with such the arrangement of the columns, we obtain item a) of the theorem. Because matrices have the same number of columns, we get $X_a \geq \left\lceil \frac{\pi(p)}{4} \right\rceil - 1$, because for each column of each matrix $L_{m^*}(j_i) + \nu_m(j_i) = \pi(m^*)$, where j_i indicates the number of each column of the matrix.

To prove part b) of the theorem, we need to consider the matrices $M_{m^*, 2p^2}(1)$ and $M_{m^*, 2p^2}(2p+1)$, and, arguing in the same way as in the proof of part a), obtain $X_b < \frac{\pi(p)}{2} + 1$ and a complete proof of Theorem 32.2.

Theorem 32.3 *The relation*

$$\pi(p(k+1)) - \pi(kp) \geq \left\lceil \frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right\rceil - 1,$$

where $2 \leq k \leq p$.

Proof. Consider the extended matrix $M_{m^*, kp}(k+1)$, where $m = \pi(p)$, $m^* = \pi(\sqrt{kp})$, $m_* = m + m^*$. We represent it in the form

$$M_{m_*, p(k+1)}(1) = M_{m_*, kp}(1) + M_{m_*, kp}(p+1).$$

We cross out all those columns of these matrices, each of which has at least one zero remainder in the rows $1 < i \leq m$ and $1 < i^* \leq m^*$, $i_1^* \neq 2^2$. Paying attention to matrices with crossed out columns, we note that

1. In the matrix $M_{m_*, p}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = [\log_2 p] + 1$, because the column corresponding to the number 1 is also not crossed out. And the number of crossed out columns in this matrix is $k_1 = p - [\log_2 p] - 1$.

2. In the matrix $M_{m_*, p}(kp+1)$ the number of uncrossed columns (corresponding to prime numbers) is $k_2^* = X + 1$. The value X is the number of those columns of this matrix that correspond to the primes p_k , where $kp < p_k < kp + p$. A 1 shows that among the numbers $kp+1, kp+2, \dots, kp+p$ there can be only one number of the form 2^s , where $kp < 2^s < kp+p$. And the number of crossed out columns in this matrix is $k_2 \geq \pi(p(k+1)) - \pi(p) + x - 1$.

Arranging the columns of matrices so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and taking into account that the number of matrix columns is equal to each other, and that in each column of each matrix there are only $\pi(p)$ zero and nonzero remainders, we compare matrices with such an arrangement of columns. As a result, we get the expression

$$X \geq \left\lceil \frac{[\log_2 p] - 1}{2} \right\rceil - 1,$$

which proves Theorem 32.3. Otherwise, a contradiction arises.

Theorem 32.4 *If the number $2n + 1$ is not a multiple of 3 or 5, then it is either a prime number, or a full power of a prime number, or the product of two primes.*

Proof. Consider the matrix $M_{m_*, 2n+1}(1)$, where $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2n+1})$, $m_* = m + m^*$. Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$. Suppose the column corresponding to the number $2n + 1$ is uncrossed. Then there are three possibilities: a) $2n + 1 = 3p_k$, where $p_k > \sqrt{2n+1}$, otherwise column $2n + 1$ would be crossed out.

b) $2n + 1 = 5p_k$, $p_k > \sqrt{2n+1}$, as in case a).

c) $2n + 1 = p_k^s$, where $p_k \neq 3$, $p_k \neq 5$, $p_k^s = 2n + 1$, or $2n + 1 = p_k \cdot p_k^*$, where $p_k > 5$, $p_k^* > 5$.

In fact, we have proved Theorem 32.4 using the method of mathematical induction, assuming that the theorem is true for all values of n_i , where $1 \leq n_i \leq n - 1$, and proved for values n . But the theorem can be proved without the help of the method of mathematical induction, using the fact that among three consecutive numbers one is always a multiple of 3. However, this is also a consequence of mathematical induction.

Corollary 32.4 *The number $(2p)^2 + 1 = p_k$ is prime if the number p is of the form $4x + 1$.*

Proof. From Theorem 32.4 we know that in the matrix $M_{m_*, (2p)^2}(1)$ the column corresponding to the number $(2p)^2 + 1$, can have zero residues only in the string $i^* = i_3^*$. Therefore, if the number $(2p)^2 + 1$ is not a multiple of 5, then this is a prime number.

Theorem 32.5 *Let $p \geq 3$ be a prime number, then the matrix $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, where $2p \leq \lambda \leq (2p)^2$, $(\lambda, 2p) = \nu(2p)$, contains at least $\left\lfloor \frac{\pi(p)-1}{4} \right\rfloor - 1$ columns, each corresponding to a prime number.*

Proof. Consider the matrices $M_{m_*, 2p}(1)$ and $M_{m_*, 2p}(\lambda)$, where λ satisfies the conditions of the theorem, and $m = \pi(2p)$, $m^* = \pi(\sqrt{2p+1})$, $m_* = m + m^*$. We cross out all those columns of these matrices that correspond to even numbers, as well as those odd columns, each of which has at least two zero remainders in rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$. Then

1. In the matrix $M_{m_*, 2p}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(2p)$, and the number of crossed out columns in this matrix is $k_1 = 2p - \pi(2p)$.

2. Suppose that in the matrix $M_{m_*, 2p}(\lambda)$ the number of uncrossed columns is $k_2^* = X$, and the number of crossed out columns in this matrix is $k_2 \geq 2p - X - 1$.

Arranging the columns of matrices so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing the matrices with such an arrangement of columns, we get

$$X \geq \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1.$$

This relation proves Theorem 32.5, because

$$\overline{M}_{m_*, 2p}^{k_2}(\lambda) - \overline{M}_{m_*, 2p}^{k_1}(1) \geq c_*(m_*, 2p, \lambda) + \pi(2p),$$

since in each column of each matrix there are $\pi(p)$ zero and nonzero remainders.

Corollary 32.5 *The following relation holds*

$$\pi((2p+1)^2) - \pi((2p-1)^2) \geq \left\lfloor \frac{\pi(p) - 1}{4} \right\rfloor - 1.$$

Proof of the corollary follows trivially from the proof of the theorem.

Theorem 32.6 For primes $p \geq 3$, the following relations hold

a) If p is a prime of the form $4x - 1$, then

$$\pi((2p)^2) = (\pi(p))^2 + \pi(p) - 1;$$

b) If p is a prime of the form $4x + 1$, then

$$\pi((2p)^2) = (\pi(p) + 1)^2 + 2\pi(p) + 1.$$

Proof. Consider the matrix $M_{m_*,(2p)^2}(1)$, where $m = \pi(2p^2)$, $m^* = \pi(2p)$, $m_* = m + m^*$. It can be represented as

$$M_{m_*,(2p)^2}(1) = M_{m_*,2p^2}(1) + M_{m_*,2p^2}(2p^2 + 1).$$

Here $p \geq 3$ is a prime number.

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 \leq i \leq m$ and $1 \leq i^* \leq m^*$.

1. In the matrix $M_{m_*,2p^2}(1)$, the number of uncrossed columns is $k_1^* = \pi(2p^2) + 1$, and the number of crossed out columns in this matrix is $k_1 = 2p^2 - \pi(2p^2) - 1$. Because the columns corresponding to the numbers 1 and 2 are also not crossed out.

2. In the matrix $M_{m_*,2p^2}(2p^2 + 1)$, the number of uncrossed columns is $k_2^* = \pi((2p)^2) - \pi(2p^2) + X$. And the number of crossed out columns in this matrix is $k_2 = (2p)^2 - \pi(2p^2) - X$.

It should be noted that the values $k_1^*(k_1)$ and $k_2^*(k_2)$ show not only the number of columns, but also the number of zero and non-zero residuals in these columns. The question arises, why the number of zero residues in the uncrossed columns of the matrix $M_{m_*,2p^2}(2p^2 + 1)$ has decreased? The point is that in matrix $M_{m_*,2p^2}(1)$ there are $2[\log_2 n] - 1$ crossed out columns, each of which has zero residuals only in rows $i = 1$ and $i^* = 1$. And in the matrix $M_{m_*,2p^2}(2p^2 + 1)$ there is only one such column. Therefore, $2[\log_2 n] - 1$ zero residuals from the columns $1 < i \leq m$, $1 < i^* \leq m^*$ passed to even columns of the same matrix. Thus, the number of primes on the segment $[2p^2 + 1, (2p)^2]$ has increased compared to the number of primes on the segment $[1, 2p^2]$. Because the concept of a prime number is also relative on the number axis, and depends on the direction of calculation. Since they are calculated from the number 1 to the right, or from the point $(2p)^2$ to the left.

For p of the form $4x + 1$ the value $k_2^* - k_1^* = \pi(p) + 2$, and for p of the form $4x - 1$ the value $k_2^* - k_1^* = 1 - \pi(p)$. Taking into account the theorems 32.4 and 32.5, we obtain that the total number of primes on the segment $[1, (2p)^2]$ is equal to the relation Theorem 32.6.

But on the other hand, the matrix $M_{m_*,(2p)^2}(1)$ can be represented as

$$M_{m_*,(2p)^2}(1) = M_{m_*,2p}(1) + M_{m_*,2p}(2p + 1) + \dots + M_{m_*,2p}((2p)^2 + 1 - 2p).$$

And using Theorems 32.5 and 32.4, we obtain Theorem 32.6.

Remark. The theorem 32.6 could be proved by representing the matrix $M_{m_*,(2p)^2}(1)$ as the sum of even and odd matrices, those.

$$M_{m_*,(2p)^2}(1) = N_{m_*,2p^2}(2 \nmid 1) + N_{m_*,2p^2}(2|2),$$

or by representing it as the sum of any other adjacent shifted matrices.

Corollary 32.6 *The following relations hold*

a) *If p is a prime of the form $4x - 1$, then*

$$\pi(2^{2p}) = (\pi(2^p) + 1)^2 + \pi(p) - 1;$$

b) *If p is a prime of the form $4x + 1$, then*

$$\pi(2^{2p}) = (\pi(2^p) + 1)^2 + 2\pi(p) + 1.$$

Proof. We represent the matrix $M_{m_*, 2^{2p}}(1)$, where $m = \pi(2^{2p-1})$, $m^* = \pi(2^p)$, $m_* = m + m^*$, in the form

$$M_{m_*, 2^{2p}}(1) = N_{m_*, 2^{2p}}(2 \uparrow 1) + N_{m_*, 2^{2p}}(2|2).$$

Let's cross out all those columns of these matrices, each of which has at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m$ and $1 < i^* \leq m^*$. Determine separately the number of crossed out and uncrossed columns of these matrices. Arranging the columns of the matrices $N_{m_*, 2^{2p}}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_*, 2^{2p}}(2|2)$ so that on one side there are uncrossed columns, and then crossed out, and comparing them with such an arrangement of columns, we come to the relations of the corollary.

Theorem 32.7 *If $2 \leq k \leq n$, then*

$$\pi(n^{2k}) = (\pi(n))^k + \begin{cases} 3[\log_2 n] - 1, \\ \pi(n) - 1. \end{cases}$$

Proof: Consider the matrix $M_{m_* n^{2k}}(1)$, which can be represented as

$$M_{m_* n^{2k}}(1) = N_{m_* \lambda}(2|2) + N_{m_* \lambda}(2 \uparrow 1) = M_{m_* \lambda}(1) + M_{m_* \lambda}(\lambda + 1),$$

where $\lambda = \left\lfloor \frac{n^{2k}}{2} \right\rfloor$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi((2n^k - 1)^2)$, $m^* = \pi(2n)$. We cross out all those columns of these matrices in each of which there are at least two zero remainders in the rows $1 < i \leq m$, $1 < i^* \leq m^*$, $p_q^2 \neq 2^2$.

1) In the matrix $N_{m_* \lambda}(2|2)$ the number of uncrossed columns

$$k_1^* = \pi((2n^k - 1)^2) + [\log_2 \lambda] + x = (\pi(n))^2 + 2[\log_2 n] + x,$$

where x is the number of those uncrossed columns that correspond to numbers $2^r \cdot p_*$, $(2n^k - 1)^2 < 2^r p_* \leq n^{2k}$, and the number of crossed out columns $k_1 = \lambda - k_1^*$.

2) In the matrix $N_{m_* \lambda}(2 \uparrow 1)$ the number of uncrossed columns

$$k_2^* = (\pi(n))^k + \begin{cases} 2[\log_2 n] + x_* \\ \pi(n) - 1 \end{cases} \quad ; \quad k_2 = \lambda - k_2^*.$$

Because the matrices $N_{m_* \lambda}(2|2)$ and $N_{m_* \lambda}(2 \uparrow 1)$ have the same number of columns, therefore $x = x_* = [\log_2 n] - 1$.

Since $\bar{N}_{m_* \lambda}(2 \uparrow 1) - \bar{N}_{m_* \lambda}(2|2) = c_*(m_* 2|2, 2 \uparrow 1)$, therefore $\bar{N}_{m_* \lambda}^{k_2}(2 \uparrow 1) - \bar{N}_{m_* \lambda}^{k_1}(2|2) = c_*(m_* 2|2, 2 \uparrow 1) - \bar{N}_{m_* \lambda}^{k_2^*}(2 \uparrow 1) - \bar{N}_{m_* \lambda}^{k_1^*}(2|2)$, where the symbol $\bar{M}_{m_* n}^k(\lambda)$ indicates the number of zero residues of the same matrix. Therefore, arranging the columns of the matrices $N_{m_* \lambda}(2 \uparrow 1)$ and $N_{m_* \lambda}(2|2)$ by the maximum number of zero residuals so that on the one hand uncrossed columns were located and then crossed out and comparing the matrices in such an arrangement of columns, we obtain the theorem. Otherwise, we get that the matrices do not have the same number of columns or, for specific values of n and k , the number of primes $\pi(n^{2k})$ is not a specific value.

Corollary 32.7 *If $n \geq 10$. then takes place*

- a) for $2 \nmid n$, $\pi((2n)^2) = (\pi(2n) - 1)^2 + \pi(n) - 1$;
- b) for $2 \mid n$, $\pi((2n)^2) = (\pi(2n) - 1)^2 + 2\pi(n) + 1$;
- c) for $2 \nmid n$, $\pi((2n)^2) = (\pi(2n) + 1)^2 - \pi(n) - 1$;
- d) for $2 \mid n$, $\pi((2n)^2) = (\pi(2n) + 1)^2 - 2\pi(n) - 1$;
- e) for $2 \nmid n$, $\pi(2^{2n}) = (\pi(2^n))^2 + \pi(2^n) - 1$.

Proof. Consider the matrix $M_{m_*(2n)^2}(1)$, represent it in the form

$$M_{m_*(2n)^2}(1) = N_{m_*\lambda}(2 \nmid 1) + N_{m_*\lambda}(2 \mid 2) = M_{m_*\lambda}(1) + M_{m_*\lambda}(\lambda + 1),$$

where $\lambda = 2n^2$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi((2n - 1)^2)$, $m^* = \pi(2n)$, $p_q^2 \neq 2^2$ and arguing as in the theorem, we obtain items a) and b) of the corollary. To prove a items c) and d), consider the matrices $N_{m_*\lambda}(2 \mid 2)$ and $N_{m_*\lambda}(2 \nmid 1)$ when $m = \pi(\sqrt{2n^2})$ and $m_* = \pi(2n)$ and strikethrough columns of matrices as in the theorem.

1) In the matrix $N_{m_*\lambda}(2 \mid 2)$ the number of uncrossed columns

$$k_1^* = \pi(2n^2) + 2[\log_2 n] + x = \begin{cases} (\pi(2n) - 1)^2 + \pi(n) - 1, & \text{for } 2 \nmid n, \\ (\pi(2n - 1))^2 + 2\pi(n) + 1, & \text{for } 2 \mid n. \end{cases}$$

and the number of crossed out columns $k_1 = 2n^2 - k_1^*$.

2) In the matrix $N_{m_*\lambda}(2 \nmid 1)$ the number of uncrossed columns

$$k_2^* = \begin{cases} (\pi(2n) + 1)^2 - \pi(n) - 1, & \text{for } 2 \nmid n, \\ (\pi(2n + 1))^2 - 2\pi(n) - 1, & \text{for } 2 \mid n. \end{cases}$$

and the number of crossed out columns $k_2 = 2n^2 - k_2^*$.

Considering the columns of matrices as in the theorem and reasoning we also obtain items c), d) and e) of the corollary.

Therefore, not only the matrix $M_{m_*n^{2n}}(1)$, where $m = \pi(n)$ can be represented as the sum of a certain number of similar matrices and with their help define the functions $\pi(n^n)$ and $\pi(n^{2n})$, $\pi(2^{2n})$ and $\pi(2^{4n})$, but also $\pi(n^{2^p} + n) - \pi(n^{2^p})$. Because the primes 2, 3 and 5 play a fundamental role in the formations of numbers on the number axis. In addition, the multiplication of numbers shows the number of points, which we call numbers, and addition shows the distance and the results of these processes need to be coordinated, i.e. in matrix mathematics

$$k \times M_{m,n}(1) \neq M_{m,n}(1) + M_{m,n}(n + 1) + \dots + M_{m,n}(n(n - 1) + 1),$$

where $2 \leq k \leq n$, and the reason for this is simple columns (numbers). Because the multiplication of numbers on the number axis depends not only on the reference point, but also on the direction of the calculation.

Note: Matrix math shows that depending on where the numbers are calculated on the number axis, the division process can become short multiplication, short root extraction, short logarithm, short differentiation. On the number axis, multiplication is considered a short addition, and further refinement is required, because multiplication of any numbers shows surface area or volume, and addition shows distance. Therefore, ambiguities appear

on the number axis that cannot be understood with the help of existing mathematics. Mathematicians have been thinking about this for centuries: they came up with various theories and methods, but to no avail. Because the foundation of the existing mathematics is not very clear. The theory of residual matrices strives for this clarity.

Theorem 32.8 *If $a \pm b$ is a multiple of p , where $(a, b) = 1$, $(b, p) = 1$, $a > p \geq b$, where $p > 2$ is a prime number, then $a^p \pm b^p$ is a multiple of p^2 .*

Proof. From the condition of the theorem it follows that we can represent the number a in the form $a = pa_1 - b$, where a_1 is some natural number. Then

$$a^p = (pa_1 - b)^p = (pa_1)^p - p(pa_1)^{p-1}b + \dots + p(pa_1)b^{p-1} - b^p.$$

Since the sum $Q = (pa_1)^p - p(pa_1)^{p-1}b + \dots + p(pa_1)b^{p-1}$ is a multiple of p^2 , then, therefore, we obtain the assertion of the theorem in the case $a + b$ is a multiple of p .

To prove the theorem in the case $a - b$, we similarly represent the number a in the form $a = pa_2 + b$ and, carrying out the same calculations, we obtain the theorem for $a - b$ is a multiple of p .

Compare the statement of Theorem 32.8 with Theorem 11.3 (p. 68), with Theorem 16.2 (p. 88) and Corollary 16.1 (p. 88).

This theorem shows the advantage of matrix mathematics over existing mathematics, because with the help of the residual matrices, Fermat's Last Theorem becomes a consequence of Fermat's little theorem, or, more precisely, a problem for schoolchildren.

Explanation: In 1964. Theorem 32.8, in the form of 2 problems was sent to the journal "Mathematics in School", was published only in the version " $a - b$ " in the section "Selected Problems". Later I returned to this problem and in 1967, in the same journal N 2, two of my theorems were published, but again in the version " $a - b$ ". To prove that I was right, I continued to work on the problem of divisibility of numbers and I managed to prove the Bertrand Postulate in an elementary way. I shared this with the famous mathematician A. I. Vinogradov (LOMI) and received approval. Continuing to work in this direction, I managed to create the theory of residual matrices (matrix mathematics), and only at the beginning of the 21st century, when it was possible to solve many questions in the distribution of primes on the number axis, I decided to publish some of these results and "ran into a wall".

P. The S. With the help of the "Theory of residual matrices" (Matrix mathematics), the regularities of prime and composite numbers on the numerical axis in the form of matrices are obtained. Since this approach to numbers on the number axis is completely new in its way, it is possible that some inaccuracies in the calculations were made in the proof of the theorems and corollaries of this collection. This cannot be the reason for refuting this theory.

But the supporters of traditional mathematics, without delving into the true essence of this theory, and, even without finishing reading, refute it, this was the reason for the creation of this book.

P. P. The S. Chebyshev proved Bertrand's correctness in Bertrand's Postulate much later. Fermat's correctness in Fermat's Little Theorem was confirmed and refined by Euler, almost as many years later. And Fermat's correctness in the "Fermat's Last Theorem" was recognized only at the end of the 20th century.

I sincerely feel sorry for those active mathematicians who will never know the correctness of Matrix Mathematics.

Chapter 33

Tardy Generalization

*In ancient architectural monuments
there is more math than
modern textbooks on mathematics e*

Matrix mathematics teaches us that number formation on the number axis does not work in the same way as in oral calculations. Because the numbers on the number axis show the number of unit segments (scale) that are tightly spaced between the beginning of the number axis and the point we call the number. Therefore, on this numerical axis, apart from integers, there are no other numbers that appear as a result of mathematical transformations. Therefore, you need to find out the relationship of the number with the point it occupies. Since our mathematics is decimal, primes 2,3 and 5 play an important role in the number formation on the number axis, because other primes like $4x - 1$ and $4x + 1$.

The numerical “chaos” that occurs on the numerical axis is created by even and odd numbers, because they are shifted relative to each other by the length of a unit segment. Both those and others can be represented as the number of two unit segments, the origin of which is located at different points. There are no numbers on the number axis that are both even and odd. The naming of numbers is the cause of this chaos. In existing (classical) mathematics, these issues are not clearly illuminated, and it is impossible to know whether it is a process of points, or segments. No continuous function, with a change in the origin, will not be able to occupy all the points (numbers) of the numerical axis.

Especially that number formation is dictated by mathematical actions, ranging from addition-subtraction, ending with differentiation and integration.

During mathematical operations, fractional, irrational, imaginary, and so on numbers appear, the true essence of which is not very clear. Because mathematical operations depend not only on the origin, but also on the direction of these operations. Therefore, points of an indefinite character appear on the number axis, which causes problems in all branches of mathematics.

The use of coordinate systems did not solve all of these problems, although progress was evident.

All attempts of mathematicians to bring the processes of number formation to unified laws were not crowned with success, because the number ZERO, which gave rise to the main axiom of existing mathematics, is the main ambiguity on the number axis. The number Zero cannot be a multiple of all integers, because this contradicts the simple logic of human cognition. It can have many divisors, but still in a limited number, within a

certain segment of the numerical axis.

Thales' theorem on the divisibility of a segment into n equal parts, without specifying the length of the segment and the value of the number n , led to problems of number formation on the number axis. Everyone knows that:

- a) the number 0 can be multiplied by any number, but it cannot be divided by any other number,
- b) negative numbers are not logarithm,
- c) not all features are integrated
- etc.

The existing mathematics is full of such prohibitions and uncertainties. The question is why? After all, the number axis was created by man and has a simple structure. Why should it contain secrets that are inaccessible to human knowledge?

Matrix mathematics forces us to consider in a new way the formulas that arise when solving various problems, and find out their true essence. How, for example, can you find out what is the relationship between the number 1 and 1^* , which appear in the equality

$$\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1^*, \text{ if } n > 0.$$

We have to understand all the equalities that arise not only in mathematics, but also in physics, and in other areas of science.

Existing mathematics does not always give us accurate results. Because the concept of a number is not unambiguous, when a large number is divided by a small number, it becomes a remainder, which is determined by its absolute value. This duality of number on the number axis led mathematics to the theory of relativity, and real interactions of real objects to dualism.

Matrix mathematics claims that until the secrets of the statement have not been revealed that among $2n$ consecutive numbers there are n even and n odd, and what distance they occupy on the number axis, we will not be able to understand the existence of incommensurable segments, the problem of magic squares, the equation

$$r^n = x^n + y^n,$$

etc. Therefore, it is necessary to master the theory of residual matrices, especially in connection with the fact that now they have begun to talk a lot about quantum computers. We think that the theory of residual matrices can become a mathematical foundation for computers that will work much faster than the existing ones.

P. The S. The author will be grateful for all the remarks and comments concerning both this text and all the problems that are discussed in it.

P. P. The S. The author of this text, Eduard Mkrtumyan, does not object to the fact that the entire text, as well as its individual parts, were published in scientific journals and monographs, provided that his authorship is indicated.

Moscow, 01/25/2020

Chapter 34

Time to gather stones

“... Not all thoughts can be expressed in words...”

Armenian parable

Only after the proof of all the theorems and consequences of this collection did it become clear that in order to understand the processes of number formation on the number axis, it is necessary to find out the mechanism of mathematical transformations of numbers in the columns of the remainder matrices.

To solve these questions, consider the residual matrix $M_{m,n}(1)$, $m = \pi(n)$. Multiplying each number corresponding to each column of this matrix by 2, we get $2, 4, 6, \dots, 2n$; from which it is possible to compose an even matrix $N_{m,n}(2|2)$. Paying attention to these numbers, we note that they are adjacent to the numbers $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$; from which it is possible to compose an odd matrix $N_{m,n}(2 \uparrow 1)$, where $m = \pi(n)$. The remarkable thing about these new matrices is that they have the same number of zero and nonzero remainders in the rows $1 < i \leq m \leq \pi(n)$. It turns out that the matrix $M_{m,n}(n + 1)$ contains the same number of zero and nonzero remainders in the same rows.

It turns out that the numbers corresponding to the columns of the matrix $M_{m,n}(1)$, $m = \pi(n)$, multiplying by 2 we have new matrices in the form $N_{m,n}(2|2)$, $N_{m,n}(2 \uparrow 1)$ and $M_{m,n}(n + 1)$. Consequently mathematical operations can make a be not only numbers but also with the matrices. In our example, the matrix $N_{m,n}(2|2)$ is formed as follows: the columns of the matrix $M_{m,n}(1)$, which correspond to even numbers, remain in their places and are added to them columns of the matrix $M_{m,n}(1)$, which correspond to odd numbers, multiplying each of them in advance by 2. The matrices $M_{m,n}(n + 1)$ and $N_{m,n}(2 \uparrow 1)$ are almost also formed.

The question arises: how and with what regularity, in the process of multiplication, these zero and nonzero remainders from the matrix $M_{m,n}(1)$ are transferred to the matrices $N_{m,n}(2|2)$, $N_{m,n}(2 \uparrow 1)$ and $M_{m,n}(n + 1)$?

Of course, using the formula $L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n)$, where $L_m(j)$ and $\nu_m(j)$ are the nonzero and zero remainders of the column numbered j of this matrix.

But it is one thing to get a formula, and another thing to understand the whole meaning of this formula, because the relation $L_m(j) + \nu_m(j) = \pi(n)$ affects all problems of number theory and, consequently, all problems of mathematics.

The question arises: how to determine the number of those columns of the matrix $M_{m,2n}(1)$, where $m = \pi(n)$, each of which corresponds to a prime or composite number if the number n is relatively large ? And how are they distributed in matrices $N_{m,n}(2|2)$, $N_{m,n}(2 \uparrow 1)$ and $M_{m,n}(n + 1)$?

Representing the matrix $M_{m,2n}(1)$ as

$$M_{m*2n}(1) = M_{m*n}(1) + M_{m*n}(n+1) = N_{m*n}(2 \uparrow 1) + N_{m*n}(2|2),$$

where $m = \pi(n)$, using the double sieve, we obtain that

$$\pi(2n) - \pi(n) \geq \left\lceil \frac{\pi(n) + \lceil \log_2 n \rceil}{2} \right\rceil - 1$$

for any natural value of n and make sure that if the value of n is relatively large, then using the remainder matrices, we can define $\pi(n)$ and $\nu(n)$ in a shorter way.

Since in the even columns of the matrix $M_{m,2n}(1)$, $m = \pi(n)$, in the rows $1 < i \leq m$, there are as many zero and nonzero remainders as there are zero and nonzero remainders are present in odd columns of the same matrix. Therefore, it becomes necessary to compare these columns for the maximum number of zero residuals. Thus, we can find the number of columns of the matrix $M_{m,2n}(1)$ each of which corresponds to a prime and composite number.

In extended power matrices, the solution to this problem is reduced to an accuracy of one.

Considering the formula $\nu(n(n \pm 1)) = \nu(n) + \nu(n \pm 1)$, I want to know the true value of the function $\nu(n^k)$, where $1 < k \leq n$, because the notation $\nu(n^k) = \nu(n)$, which is accepted in existing mathematics, does not inspire confidence and does not reveal the true nature of the function $\nu(n^k)$. As, for example, $\nu(p^2)$ shows that on the number axis between the number 0 (zero) and the number p^2 there are densely spaced p^2 unit segments of which $\pi(p^2)$ show the number of primes in the interval $[0, p^2]$. And the length of these unit segments is equal to the scale of the given numerical axis. Therefore, the number on the numerical axis shows the number of segments, and not points, as is customary in existing mathematics. But the matrices of residuals simultaneously make it possible to express the number of line segments in terms of the number of points, which on both sides limit the number of these unit segments. Therefore, a composite number consists of at least two prime divisors, regardless of whether these divisors are equal to each other or differ from each other, i.e. a composite number is a combination of prime numbers. The number n is simultaneously a side of $n - 1$ squares, each of which can be divided into $n - 1$ equal parts. Therefore, $n^2 = n \times (n - 1)$, $(n + 1)^2 = n \times (n + 1)$, and you need to understand the essence of these formulas, because, as noted, the number n shows the number of segments.

Similarly, we get $n^3 = n \times n^2$, $n^4 = n^3 \times n$, $n^5 = n \times n^4$, etc. This approach to numbers on the number axis leads to the fact that the matrix of residuals, which has the middle column, also has opposite matrices. Let's remind that:

a) matrix $M_{m,2n+2}(0_n)$, where $m = \pi(n)$, $0_n = \prod_{i=1}^m p_i$ is called the main matrix of the number axis;

b) the matrix with the middle column is called the main matrix;

c) similar residual matrices that are equidistant from the middle column or from the outermost columns of the main matrix are called opposing matrices;

e) columns of opposing matrices that are at equal distances from the middle column, or from the outermost columns of the main matrix, are called opposing columns;

f) the distance of two columns, or the number of unit segments in the residual matrices, is equal to the number of columns that are between these columns.

Thus, using the extended matrices property, where $0_n = \prod_{i=1}^{m_*} p_i$, $m_* = m + m^*$, $m = \pi(n)$, $m^* = \pi(\sqrt{2(n+1)})$, we come to the conclusion that

$$L_{m_*}(0_n) = 0, \quad \nu_{m_*}(0_n) = \pi(n), \quad L_{m_*}(1) = \pi(n), \quad \nu_{m_*}(1) = 0.$$

It turns out that in the articles of this collection we touched upon more questions than we could answer them and we still have a lot to understand and comprehend. But still, since the numbers $0_n - 1$ and $0_n + 1$ are coprime numbers proved that among the numbers $(p+1)^2$ and p^2 there is a minimum $[\log_2 p] - 1$ primes and among the numbers $(2n-1)^2$ and $(2n+1)^2$ there is at least one pair of twin primes, etc. Or since our mathematics is decimal, so the prime numbers 2, 3 and 5 take on the main roles in the process of number formation, because the rest of the prime numbers are of the form $4x-1$ or $4x+1$. Hence,

- a) $\pi(p^2) = (\pi(p))^2 + \pi(p) - 1$, if a prime number p of the form $4x-1$;
- b) $\pi(p^2) = (\pi(p)+1)^2 + 2\pi(p) + 1$, if the number p is of the form $4x+1$.

It turned out that the results obtained using the residual matrices cannot always be obtained using existing mathematics, because it often ignores the distance between the number 0 (zero) and the number 1 (one). This results in the continuity of the number axis and the negation of negative primes.

Knowing that moving in the direction of the numerical axis from point (number) 1 or 2 with a step length of two unit segments, after a certain number of steps will step on points $3, 5, 7, \dots, p_k$ or $4, 6, 8, \dots, 2^k$, which we call numbers, denies that moving from the same points with the same step length in the opposite direction of the numerical axis will not step on the points $(-p_i)$ or (-2^k) . This illogical approach to numbers on the number axis gradually accumulates problems, the solution of which becomes impossible within the limits of existing mathematics.

Instead of finding out the reason for the appearance of these problems in various branches of mathematics, we are fed with concepts of an indefinite nature, such as: irrational, transcendental, imaginary numbers. Without completely understanding the sum and difference of numbers on the number axis, scalar and vector sums and products are considered, up to trigonometric sums, without noting how they differ from trigonometric differences and products.

As a result, the square is divided into four parts, in which even and odd numbers are considered as even and odd functions, which in different quarters get equivalent values with different regularities and which make solving mathematical problems in these quarters more difficult than explaining. We get that trigonometric equations should not be confused with algebraic ones and that they have nothing in common.

Calling the same things by different names thinks that these things will change their essence. Of course, numbers cannot speak and cannot defend their rights, but the number axis has become a constitution for them, and we must understand the structure of the number axis and reveal the role of any number in this structure.

In higher algebra, they tried to do this with the help of determinants, submatrices and minors. But this led to great difficulties, because the distance between the number 0 (zero) and the number 1 (one) was not taken into account - the scale of the number axis.

Matrix mathematics takes this omission into account and tries with all its might to complete this work successfully. It is clear that with the help of similar matrices it models numerical processes on various intervals of the numerical axis and, comparing them with the matrices $M_{m,n}(1)$ and $M_{m,2n}(1)$, where $m = \pi(n)$, defines the number of simple columns (even and odd) in the matrices $M_{m,N}(1)$ and $M_{m,2N}(1)$, where $N \gg n$, because any

numerical problem is reduced to the problem of determining prime and composite numbers on a numerical interval of integers $[1, N]$ or $[1, 2N]$. Knowing that the matrix $M_{m,n^k}(1)$ for $2 \nmid n$ has a middle column, using the formulas

$$n = [\log_2 N], \quad n = [\log_n n^N], \quad n = [\log_n n^n]$$

$\pi(N)$ and $\nu(N)$ are determined. And if the middle column of this matrix corresponds to the number λ^* , then the columns of this matrix that correspond to the numbers 2^s , $1 < 2^s \leq n$ in the matrix $M_{m,n}(n^k - 2n)$ will match the numbers p_k^* , where $n^{k-1} < p_k^* < n^k$, because the points p^* and 2^s , which are represented by numbers in relation to the middle column (number) λ^* opposite. The function $\pi(n^k)$ depends on the specific values of n and k and in the case of $2 \leq k \leq n \leq n^2$ we obtain

$$\pi(n^{2k}) = (\pi(n))^k + \begin{cases} 3[\log_2 n] - 1, \\ \pi(n) - 1. \end{cases}$$

You can also get the value of the function $\pi(2^{2n})$ and $\pi(2^{4n})$.

Thus, using the remainder matrices, we solve the cryptography problem completely and the divisibility of a segment of length $[0, 10^{10}]$ or $[1, 10^{10} - 1]$ into equal parts. Since $10^{10} = 10^9 \cdot 10$, $10^9 = 10^{10} : 10$ and $10^9 = 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3$, we come to I conclude that among the numbers $1000 = 10^3$ there are 333 numbers, each of which is a multiple of 3 th and 666 numbers which, when divided by 3, gives the remainder 1 or 2. Therefore, among the points $[0, 10^{10}]$ or $[1, 10^{10} - 1]$ there are $3 \cdot 10^9$ points which are called numbers. This means that any line segment of any number axis, of any length, can be divided into at most $3 \cdot 10^9$ equal parts, regardless of the scale and location of this line segment on the given number axis.

In the language of physics, this means that energy, like a segment, can be divided by no more than $3 \cdot 10^9$ equal parts. Consequently, the average speed of a light quantum in outer space, in all directions, is equal to $3 \cdot 10^9$ m / s. But since the Earth in its orbit moves at a speed of $\approx 3 \cdot 10^4$ m / s, taking into account that the foci of the orbit also move, therefore, in terrestrial conditions, the speed of light becomes $\approx 3 \cdot 10^8$ m / sec regardless of the method of its determination. The acceleration of gravity, cosmic velocities, etc., are also determined, the values of which are also relative and approximate, because they are also due to "side parameters".

In addition, taking the logarithm of the number 10^{10} in terms of 3, 5, 7 and taking into account that there are two pairs of twin primes among the numbers $[1, 10]$, using the remainder matrices and the double sieve method, we obtain that on the segment of numbers $[1, 10^{10}]$ there are 2^{10} pairs of twin primes and 4^{10} primes.

Representing the matrix $M_{m_*10^{10}}(1)$ as a matrix sum

$$M_{m_*10^{10}}(1) = N_{m_*10^9}(2 \nmid 1) + N_{m_*10^9}(2|2)$$

we manage to reduce the decimal system of calculation to a binary system, while facilitating the solution of many (if not all) problems that arise due to mathematical processes on the number axis.

The question is, is it possible to model the interaction of real objects in the same way as numbers are modeled using the residual matrices and studying them to obtain real results?

Sure. Researchers have been doing this since the time of Archimedes and even earlier. This is evidenced by ancient problems and “puzzles” that are not solved by traditional methods of mathematics.

But when interacting with real objects, “side” parameters arise that make it difficult not only to solve the problem, but also to understand the true essence of this solution. For example: if the body moving from the point A after a certain period of time comes to the point B and you need to determine the average speed or average acceleration of this movement. Even if we neglect the characteristics of a moving body and medium, i.e. If we idealize motion, then we still face the problems of divisibility of the displacement vector and the time vector, especially when the word is about instantaneous speed and instantaneous acceleration. Since the time vector is always directed from the past to the future, and until the true essence of instantaneous speed and especially instantaneous acceleration has been clarified, it is impossible to confirm that the interaction of real objects of the past can be equivalent in the future. Of course, the average speed and acceleration during such a movement is determined using the vector of displacement and time. But does this give us grounds to assert that speed is directly proportional to displacement and inversely proportional to time? I’m not talking about acceleration yet. Of course not, because speed and acceleration arise during the manifestation of some force that fills the body with energy - potential and kinetic, which is fixed by the law of conservation of energy and hints at the limited energy that the moving body receives.

The dependence of speed on displacement and time is the same as the dependence of the resistance of a conductor on voltage and current in an operating electrical circuit. After all, a physicist will not say that the resistance of a conductor is directly proportional to the voltage and inversely proportional to the strength of the current. Everyone knows that the resistance of a conductor depends on the configuration, on the material of the conductor and on the temperature. So the dependence of speed on movement and on time separately, “imaginary” and for some researchers, is taken as “real” to explain some other issues. As, for example, real and imaginary images of objects in spherical mirrors are used to explain the processes of images. Therefore, cases are not excluded when the image is taken for an object, especially when the observer cannot see the object. It is known that not all celestial bodies are visible to the terrestrial observer, and various layers of outer space for us become spherical mirrors and, perhaps, having seen the image of bodies that cannot be seen from the earth’s surface, we think that they are some kind of massive bodies.

At the beginning of the 20th century, A. Einstein, relying on the work of Galileo, Newton and many other scientists, created his “Special Theory of Relativity” and was able to explain not only the motion of Brownian particles, the photoelectric effect, quation, but also the splitting of atomic nuclei. By this, he expanded the field of intellectual knowledge of mankind. But this does not mean that this purely mathematical theory proves that movement or time is dependent on the speed of a moving body. He simply showed that the “Special theory of relativity” differs from Galileo’s relativity in the same way that the real number differs from the imaginary one. Proceeding from the fact that the divisibility of energy into equal parts is as limited as the divisibility of a segment on the number axis, Einstein equated the energy of a photon with its instantaneous velocity and “involuntarily” created the concept of negative energy and negative time, which, for example, “The problem of twins” have become the subject of “controversy” by many eminent scientists at the present time.

Sensing the importance of time intervals in the interactions of real objects that tire-

lessly move in inertial systems relative to each other, Einstein (and not only him) came to the concept of tensors. But for almost half a century working on the “Field Theory” he achieved a lot in this direction, but could not complete it. Maybe because our knowledge of the universe, space and time is so small that we cannot come to objective conclusions regarding them? Or maybe due to the fact that they could not express the number of composite numbers of the segment $[1, n^2]$ in terms of $\pi(n)$? Remainder matrices force us to think about these questions, because Remainder Matrix Theory explains not only the number of primes $\pi(\sqrt{N})$ and $\pi(N) - \pi(\sqrt{N})$, but also the number of numbers of the form $[\log_2 N]$ and $[\log_2 2^N]$.

Considering real interactions of real objects, one should not forget that mathematics is not omnipotent and it gives us only quantitative information. We obtain the qualitative properties of this information by analyzing these interactions. Therefore, any section of any science develops based on specific axioms or postulates, which are a generalization of the intellectual potential of mankind.

Axioms or postulates are not dogmas and over time they expand to embrace new phenomena that have not been noticed or met before. This is evidenced by the geometry of Lobachevsky and Riemann, Bohr’s postulates and Heisenberg’s uncertainties, etc.

In mathematics, the main axiom appeared after the adoption of coordinate systems, as the number 0 (zero) is a multiple of all integers, and for real interactions of real objects, it took the form of the “Big Bang”, which became the basis of the theory of expanding galaxies. The theory of residual matrices led mathematics to the invariance of numerical processes, to which it will lead to real interactions of real objects, it is still necessary to find out:

- a) *which part of the communicating energy for the body becomes potential and which part moves it;*
- b) *dependence of the components of this vector on different directions;*
- c) *body movement in outer space is smooth or jumps;*
- e) *the fundamental formula describing real interactions of real objects is a postulate or a law for a researcher*

etc.

The whole point is that taking the sides of a square for straight line segments, its diagonal becomes a zigzag line, or vice versa. If the circle is considered a smooth line, then its diameter becomes jump-like or vice versa. Therefore, the endless expansion, or endless narrowing of the universe, is not only difficult to imagine, but also difficult to explain in words or describe by formulas.

Yerevan, 2021.

P.S. Dear reader, if you cannot answer the question that is written on the cover of this book, you will have to read all the articles of this collection again, more carefully.



Эдвард Мкртумян

